- Einstein Summation Convention

بردار u را در نظر بگیرید. این بردار برحسب بردارهای پایه متعامد (Orthonormal) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\underline{u} = u_1 \underline{\delta}_1 + u_2 \underline{\delta}_2 + u_3 \underline{\delta}_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i \underline{\delta}_i$$

این نحوه نوشتن جمع ها خیلی راحت نیست و در محاسبات طولانی خیلی طاقت فرسا می‌شود.

بنا براین، یک قرارداد متداول که به طور گسترده ای پذیرفته شده است، به صورت زیر است:

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i \underline{\delta}_i \equiv u_i \underline{\delta}_i$$

به عبارت دیگر، اندیس های تکراری (repeated indices) به طور اتوماتیک یک جمع را نشان می‌دهند.

اندیس های تکراری اغلب به اندیس های dummy معروفند چرا که ماهیتشان بر اثر جمع گم می‌شود.

خیلی مواقع ما نیاز داریم تا با اجزای (components) یک بردار سروکار داریم. بنابراین ما می‌توانیم $\underline{u}$ را به صورت روبرو نشان دهیم: u_i

اندیس های غیر تکراری اغلب به عنوان اندیس های آزاد (free) شناخته می‌شوند.

این نحوه نوشتار بایستی سازگار باشد یعنی اگه مثلن:

$$\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$$

می‌شه نوشت:

$$c_i = a_i + b_i$$

ولی نمی‌شه:

$$c_i = a_i + b_j$$

- Kronecker Delta

علامت دلتای کرونکر به اجزای تنسور identity گفته می‌شه که معمولن با علامت $\underline{\underline{I}}$ یا $\underline{\underline{\delta}}$ نشون داده می‌شه

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

اگه این تنسور رو با یه بردار ترکیب کنیم و قرارداد جمع را بکار ببریم، منجر به عبارتی مانند عبارت زیر می‌شود:

$$\delta_{ij} u_j = \delta_{i1} u_1 + \delta_{i2} u_2 + \delta_{i3} u_3 = u_i$$

اگه یه ترم توی δ_{ij} ضرب بشه، می‌شه δ_{ij} رو حذف کرد و i ها رو به j یا برعکس تبدیل می‌کنیم.

- Second & Higher Order Tensors

ما مفهوم یک بردار به صورت یک تنسور کارتزینی مرتبه اول معرفی کردیم و اجزای یک بردار با یک اندیس تعریف می‌شن

اسکالرها (Scalars)، تانسورهای مرتبه صفر می‌باشن و مستقل از بردارهای پایه هستن. پس نیازی به اندیس برای نشان دادن تک جزو نشان ندارن

یه تنسور مرتبه «۲» به دو اندیس برای مشخص کردن اجزایش نیاز داره:

$$\underline{\underline{G}} = G_{ij} \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j$$

- Tensor/Open Product & Dyads

ترکیب دو بردار بدون contract کردن اندیس‌هایشان، یه تانسور مرتبه 2 به اسم dyad می‌ده:

$$\underline{u}\underline{v} = u_i \underline{\delta}_i v_j \underline{\delta}_j = u_i v_j \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j = c_{ij} \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j$$

به این ضرب باز (Open Product) هم می‌گن.

تنسور های مرتبه بالاتر (Polyads) می‌توانند از ضرب های باز چندگانه ایجاد شوند. مثلن:

$$\underline{u}\underline{v}\underline{w} = u_i v_j w_k \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \underline{\delta}_k = c_{ijk} \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \underline{\delta}_k \quad \text{(tryad)}$$

+ ضرب چندگانه‌ی باز، جابجاپذیر نیست:

$$\underline{u}\underline{v} \neq \underline{v}\underline{u}$$

به یه ترکیب خطی dyad با ضرایب اسکالر حقیقی (real)، هم یه dyadic می‌گن:

$$a\underline{u}\underline{v} + b\underline{v}\underline{u}.$$

- Gradient

عملگر گرادیان عبارتست از : $\underline{\nabla} = \underline{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

برای مثال گرادیان یه اسکالر $\phi(\underline{x})$ عبارتست از : $\underline{\nabla}\phi = \underline{\delta}_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$

- Inner Product

ضرب داخلی دو تنسور $\underline{c}$ و $\underline{d}$ یعنی اینکه یه ضرب دات (dot product) بین جفت بردارهای پایه ایجاد شود. ساده ترین ضرب داخلی بین دو بردار به صورت زیراست :

$$\underline{u}\cdot\underline{v} = (u_i\underline{\delta}_i)\cdot(v_j\underline{\delta}_j) = u_i v_j \delta_{ij} \overset{K.\delta}{=} u_j v_j$$

در تنسورهای مرتبه بالاتر، بردارهای پایه ای که بین آن ها ضرب دات اعمال می شود باید مشخص باشن که این هم توی vector notation مبهمه ولی توی index notation مشخصه. مثلا ضرب داخلی یه تنسور مرتبه 3 و 2 :

$$\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}} = (A_{ijk}\underline{\delta}_i\underline{\delta}_j\underline{\delta}_k)\cdot(B_{mn}\underline{\delta}_m\underline{\delta}_n) = A_{ijk}B_{mn}(\underline{\delta}_i\underline{\delta}_j\underline{\delta}_k)\cdot(\underline{\delta}_m\underline{\delta}_n)$$

$$= A_{ijk}B_{mn}\underline{\delta}_i\underline{\delta}_j(\underline{\delta}_k\cdot\underline{\delta}_m)\underline{\delta}_n = A_{ijk}B_{mn}\underline{\delta}_i\underline{\delta}_j\delta_{km}\underline{\delta}_n$$

$$= A_{ijk}B_{kn}\underline{\delta}_i\underline{\delta}_j\underline{\delta}_n$$

- ~~Divergence~~ Contraction

این عملی است که دو اندیس آزاد (free) برابر قرار گرفته که حاکی از یک جمع است.

برای مثال، اگر تنسور مرتبه 3 d_{ijk} را در نظر بگیریم، " contract کردن i و j " یعنی اینکه یه ضرب داخلی بین بردارهای پایه مربوط به اندیس های i و j باشد :

$$d_{ijk}(\underline{\delta}_i\cdot\underline{\delta}_j)\underline{\delta}_k = d_{ijk}\delta_{ij}\underline{\delta}_k = d_{jjk}\underline{\delta}_k$$

- Divergence

عبارتست از ضرب داخلی اپراتور گرادیان در یک تنسور

دیورژانس برداری است :

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{u} = (\underline{\delta}_i\frac{\partial}{\partial x_i})\cdot(u_j\underline{\delta}_j)$$

$$= \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\underline{\delta}_i\cdot\underline{\delta}_j) = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\delta_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

دیورژانس تنسور مرتبه 2 :

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{A}} = (\underline{\delta}_i\frac{\partial}{\partial x_i})\cdot(A_{jk}\underline{\delta}_j\underline{\delta}_k)$$

$$= \frac{\partial A_{jk}}{\partial x_i}(\underline{\delta}_i\cdot\underline{\delta}_j)\underline{\delta}_k = \frac{\partial A_{jk}}{\partial x_i}\delta_{ij}\underline{\delta}_k = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_i}\underline{\delta}_k$$

دیورژانس تنسور مرتبه 3 :

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{B}} = (\underline{\delta}_i\frac{\partial}{\partial x_i})\cdot(B_{jkl}\underline{\delta}_j\underline{\delta}_k\underline{\delta}_l)$$

$$= \frac{\partial B_{jkl}}{\partial x_i}(\underline{\delta}_i\cdot\underline{\delta}_j)\underline{\delta}_k\underline{\delta}_l = \frac{\partial B_{jkl}}{\partial x_i}\delta_{ij}\underline{\delta}_k\underline{\delta}_l$$

$$= \frac{\partial B_{jkl}}{\partial x_j}\underline{\delta}_k\underline{\delta}_l$$

Laplacian

عبارتست از دیورژانس گرادیان :

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla} = \left(\underline{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\cdot\left(\underline{\delta}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \underline{\delta}_j \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\underline{\delta}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right]$$

$$= \underline{\delta}_i \cdot \left[\frac{\partial \underline{\delta}_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} + \underline{\delta}_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right] = \underline{\delta}_i \cdot \left[0 + \underline{\delta}_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right]$$

$$= \delta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \Longrightarrow \underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

توجه کنید که اپراتور لاپلاسین، مرتبه تنسوری که به آن اعمال می شود را عوض نمی کند

Levi-Civita Symbol

علامت آن به صورت ε_{ijk} نشان داده می شود و به صورت روبرو تعریف می شود :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{cyclic} \\ -1 & \text{anti-cyclic} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

برای مثال :

$\varepsilon_{113} = 0$, $\varepsilon_{313} = 0$, $\varepsilon_{231} = 1$, $\varepsilon_{132} = -1$

Vector Cross Product

با استفاده از ε_{ijk} تعریف می شود :

$$\underline{d} = \underline{b} \times \underline{c}$$

$$\hookrightarrow d_i = \varepsilon_{ijk} b_j c_k = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} b_j c_k$$

Curl

یعنی ضرب خارجی یک تنسور در اپراتور گرادیان

$$\underline{\nabla}\times = \varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\underline{\delta}_i \underline{\delta}_k$$

کرل بردار :

$$\underline{\nabla}\times\underline{A} = \left(\underline{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\times\left(A_j \underline{\delta}_j\right)$$

$$= \underline{\delta}_i \times \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_j \underline{\delta}_j\right)\right] = \underline{\delta}_i \times \left[\underline{\delta}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} + A_j \frac{\partial \underline{\delta}_j}{\partial x_i}\right]$$

$$= \underline{\delta}_i \times \left[\underline{\delta}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} + 0\right] = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\underline{\delta}_i \times \underline{\delta}_j = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\varepsilon_{ijk}\underline{\delta}_k$$