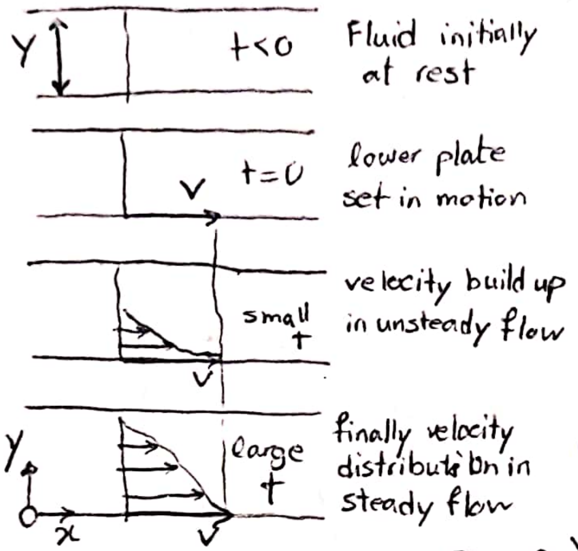
ATP - فصل 01 ،، ویسکوزیته و مکانیسم انتقال مومنتوم ،،

- سرفصل مطالب:
  - قانون ویسکوزیته نیوتن
  - تعمیم قانون ویسکوزیته نیوتن
  - انتقال مومنتوم توده‌ای

① قانون ویسکوزیته نیوتن



- یکی از شیوه‌های انتقال مومنتوم به طریق مولکولی می‌باشد. برای درک این روش انتقال مومنتوم، یک سیال بین دو صفحه بزرگ موازی را در نظر بگیرید (شکل روبرو)
- توجه گردد که سیال می‌تواند گاز یا مایع باشد.
- این سیستم در ابتدا ساکن می‌باشد اما از زمان $t=0$ ، صفحه پایینی با سرعت ثابت V به حرکت درمی‌آید. با گذشت زمان، پروفایل سرعت سیال تغییر کرده و سرانجام پروفایل سرعت حالت پایای خطی نشان داده شده در شکل برقرار می‌گردد.
- در حالت پایا برای اینکه صفحه پایینی حرکت با سرعت ثابت V را داشته باشد، نیرویی به مقدار F بایستی به آن صفحه وارد گردد.
- به صورت تجربی مشاهده شده است که

$$F \propto A \frac{V}{Y}$$

V ← سرعت دیواره

Y ← فاصله بین دو دیواره

A ← مساحت سطح تماس سیال و دیواره

- تناسب فوق با وارد کردن یک ثابت به تساوی تبدیل می‌شه:

$$F = \mu A \frac{V}{Y}$$

μ ← ثابت تناسب که خاصیتی (property) سیال می‌باشد [ویسکوزیته]

- رابطه فوق را بازنویسی کنیم (با تغییر علامت):

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{V}{Y} \Rightarrow \tau_{yx} = \mu \frac{V}{Y}$$

- با توجه به اینکه $\left(\frac{dv_x}{dy} = -\frac{V}{Y}\right)$

$$⊛ \Rightarrow \boxed{\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy}}$$

τ_{yx} ← تنش برشی (shear stress)

[قانون ویسکوزیته نیوتن] « نیروی برشی به ازای مساحت سطح، متناسب با منفی گرادیان سرعت است. »

- بایستی توجه گردد که معادله ⊛ نباید قانون اطلاق گردد و آن یک رابطه تجربی می‌باشد و ساده‌ترین شکل ارتباط تنش (نیرو به ازای واحد سطح) و گرادیان سرعت می‌باشد.

- توجه گردد که:
  - جریان سیال‌هایی با وزن مولکولی کمتر از 5000 ، از معادله ⊛ پیروی می‌کنند (سیال‌های نیوتنی) [Newtonian fluids]
  - بسیاری از مواد دیگر مانند مایعات پلیمری، سوسپانسیون‌ها، و دیگر سیالات مرکب از معادله ⊛ پیروی نمی‌کنند (سیال‌های غیرنیوتنی) [NonNewtonian fluids]

- معادله ⊛ به دو صورت می‌شه که تعبیر بشه:
  - نیرو [همانی که گفتیم]
  - انتقال مومنتوم: در همسایگی سطح جامد متحرک در $y=0$، سیال مومنتومی در راستای x کسب می‌کند. این سیال به لایه‌های سیال مجاور، مومنتومی در راستای x منتقل می‌کند و باعث حرکت لایه‌ای از سیال در راستای x می‌شه.
    - یعنی مومنتوم - x در جهت y در سیال انتقال می‌یابد (شار مومنتوم - x در جهت $+y$)
    - "The flux of x-momentum in the positive y direction"

② تعمیم قانون ویسکوزیته نیوتن

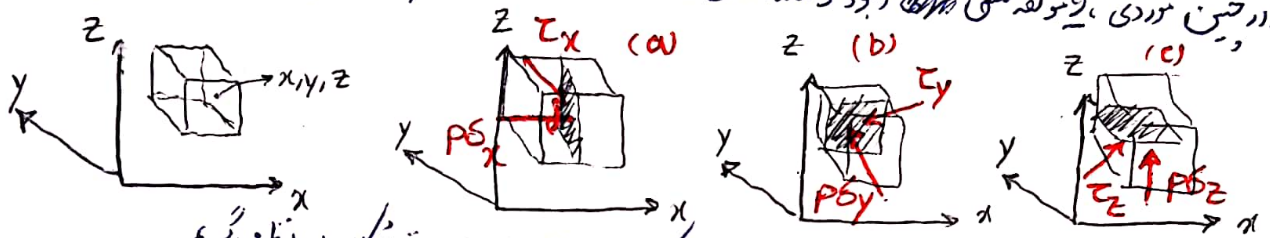
- بیشتر حرکت سیالی در حالت پایا بین دو دیواره موازی مورد بررسی قرار گرفت. چنین جریانی، جریان برشی حالت پایا نامیده می‌شود که در آن V_x تابعی از y می‌باشد و V_y و V_z صفر (A simple steady-state shearing flow)

- عموماً
  - جریان های مطرح در مکانیک سیالات بسیار پیچیده‌تر بوده و سه مؤلفه سرعت، تابعی از مختصات و زمان می‌باشند.
  - بنابراین نیاز است تا رابطه ⊛ برای چنین جریان هایی تعمیم داده شود.
  - برای این منظور، یک الگوی جریان عمومی را در نظر بگیرید که در آن مؤلفه های سرعت سیال به صورت روبرو می‌باشند

$$V_x = V_x(x, y, z, t)$$
$$V_y = V_y(x, y, z, t)$$
$$V_z = V_z(x, y, z, t)$$

τ_{ij} where $i, j = x, y, z$

  - در چنین موردی، ۹ مؤلفه تنش وجود خواهند داشت:



  - ابتدا با این مؤلفه های تنش آشنا شویم. برای این منظور، یک المان حجمی از سیال مانند شکل را در نظر می‌گیریم
  - توجه گردد که مرکز المان حجمی $O(x, y, z)$ می‌باشد.
  - نیروهای وارد شونده دو قسمت دارند
    - فشاری
    - ویسکوز
  - قصد داریم نیروهای وارد شونده به سیال شکل (a) از سمت راست المان سیال چپ را محاسبه کنیم
    - نیروهای فشاری همیشه عمود به سطح می‌باشند و در نتیجه نیروی فشاری اعمال شده در شکل (a) به ازای مساحت سطح برابر: $p\underline{\delta}_x$ (بردار یکه در راستای x)
    - نیروهای ویسکوز وقتی وجود دارند که گرادیان سرعت درون سیال وجود داشته باشد. این نیرو به طور کلی جهت عمود یا موازی سطح ندارد و می‌تواند جهت آن زاویه‌ای با سطح داشته باشد: $\underline{\tau}_x$
  - همینطور برای شکل المان (b)
    - نیروهای فشاری: $p\underline{\delta}_y$
    - " ویسکوز: $\underline{\tau}_y$
  - " " " " (c)
    - " فشاری: $p\underline{\delta}_z$
    - " ویسکوز: $\underline{\tau}_z$
  - نیروهای وارد شونده در سه شکل را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

نیروی شکل a ← $\underline{f}_a = \underline{\tau}_x + p\underline{\delta}_x$

نیروی شکل b ← $\underline{f}_b = \underline{\tau}_y + p\underline{\delta}_y$

c " " ← $\underline{f}_c = \underline{\tau}_z + p\underline{\delta}_z$

②

توجه گردد که ~~...~~ نیروهای فوق می توانند به صورت مؤلفه‌هایشان تجزیه گردند:

$$\underline{f}_a = f_{a,x}\,\hat{\underline{i}} + f_{a,y}\,\hat{\underline{j}} + f_{a,z}\,\hat{\underline{k}} \qquad \underline{f}_b = f_{b,x}\,\hat{\underline{i}} + f_{b,y}\,\hat{\underline{j}} + f_{b,z}\,\hat{\underline{k}} \qquad \underline{f}_c = f_{c,x}\,\hat{\underline{i}} + f_{c,y}\,\hat{\underline{j}} + f_{c,z}\,\hat{\underline{k}}$$

$$\begin{cases} f_{a,x} = \tau_{xx} + p \\ f_{a,y} = \tau_{xy} + 0 \\ f_{a,z} = \tau_{xz} + 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f_{b,x} = \tau_{yx} + 0 \\ f_{b,y} = \tau_{yy} + p \\ f_{b,z} = \tau_{yz} + 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f_{c,x} = \tau_{zx} + 0 \\ f_{c,y} = \tau_{zy} + 0 \\ f_{c,z} = \tau_{zz} + p \end{cases}$$

البته می توان نیروها را به این صورت بیان کرد:

$$\pi_{ij} = \tau_{ij} + p\underbrace{\delta_{ij}}_{\text{kronecker delta}} \quad , \quad i,j = x,y,z$$

در این حالت

π_{ij} = the molecular stresses

τ_{ij} = the viscous stresses

τ_{ij} به دو صورت می تواند توصیف گردد

نیرو: عبارتست از مولفه‌ی j نیروی وارد به سطحی با مساحت واحد که بردار عمود به سطح، در جهت +i

انتقال مومنتوم: عبارتست از شار مومنتوم j (مؤلفه‌ی j مومنتوم) در جهت +i

انواع molecular stresses

normal stresses: π_{xx}، π_{yy} و π_{zz}

Shear ": π_{xy}، π_{xz}، ...

- حال قصد داریم رابطه تنش ویسکوز $\underline{\tau}$ (The viscous stress) را با گرادیان‌های سرعت سیال بیان کنیم.

- در راستای تعمیم قانون ویسکوزیته نیوتن

می شه چند قید روی تنش‌ها اعمال کرد:

تنش‌های ویسکوز، ترکیب خطی از همه‌ی گرادیان‌های سرعت می باشند:

$$\tau_{ij} = -\sum_{k}^{x,y,z}\sum_{l}^{x,y,z} \mu_{ijkl}\frac{\partial v_k}{\partial x_l}$$

که $i, j, k, l = x, y, z$ و μ_{ijkl} ضرایب ویسکوزیته هستند (81 عدد)

واسه‌ی سیالات نیوتنی، مشتق‌های زمانی یا انتگرال‌های زمانی در رابطه‌ی فوق ظاهر نمی‌شوند

اگه سیال توی یه حالت چرخش خالص باشه، هیچ نیروی ویسکوزی وجود نخواهد داشت. این قید منجر به این نتیجه گیری خواهد شد که τ_{ij} متقارن (symmetric) می باشد. یعنی اگه i و j جابجا بشن، اونطوری ترکیب خطی گرادیان‌های سرعت نباید تغییر کند. می شه نشون داد که تنها ترکیب خطی گرادیان‌های سرعت که متقارنه، جمع خطی ای از دو عبارت جلوئه:

$$\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \quad \text{و} \quad \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\delta_{ij}$$

اگه سیال همسانگرد (Isotropic) باشه، اونوقت:

$$\tau_{ij} = A\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) + B\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\delta_{ij}$$

توجه بشه که این رابطه باید به قانون ویسکوزیته نیوتن واسه‌ی یه جریان ساده بشه. در نتیجه:

$$A = -\mu$$

$$B = \frac{2}{3}\mu - k$$

- the dilational viscosity
- واسه‌ی گازهای تک‌اتمی توی دانسیتی کم : $k = 0$

بر طبق کارهای پژوهشی انجام شده :

در نتیجه :

$$\tau_{ij} = -\mu\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) + \left(\frac{2}{3}\mu - k\right)\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\delta_{ij}$$

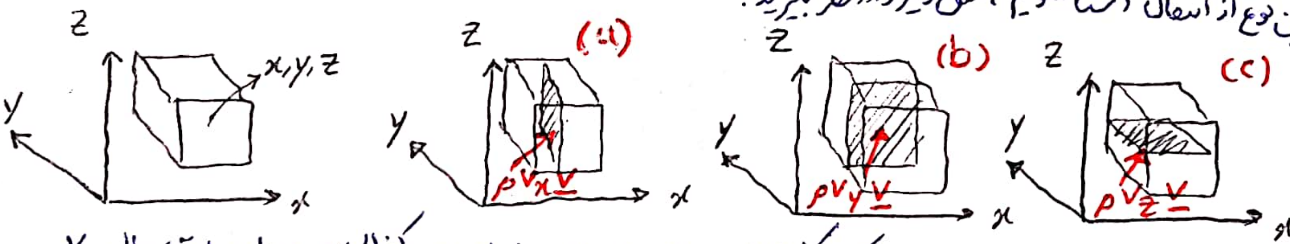
که براساس علامت گذاری برداری :

$$\underline{\underline{\tau}} = -\mu\left(\underline{\nabla}\,\underline{v} + (\underline{\nabla}\,\underline{v})^T\right) + \left(\frac{2}{3}\mu - k\right)(\underline{\nabla}\cdot\underline{v})\underline{\underline{\delta}}$$

- $\underline{\underline{\delta}}$ the unit tensor with components δ_{ij}
- $\underline{\nabla}\,\underline{v}$ the velocity gradient tensor with components $\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$
- $(\underline{\nabla}\,\underline{v})^T$ ~ transpose of the velocity gradient tensor w.c. $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$
- $\underline{\nabla}\cdot\underline{v}$ ~ divergence of the velocity vector

$\boxed{\text{③ انتقال مومنتوم توده‌ای}}$

- در بخش پیش با انتقال مومنتوم مولکولی آشنا شدیم. می دانیم که مومنتوم به روش دیگری نیز منتقل می‌شود (روش توده‌ای)
- برای اینکه با این نوع از انتقال آشنا شویم، شکل زیر را در نظر بگیرید :



- شکل فوق
  - یک المان حجمی از سیال را نشان می دهد که مرکز المان در x، y و z می باشد. در مرکز المان، بردار سرعت سیال $\underline{v}$ می باشد. مانند شکل‌های a، b و c، سه صفحه عمود برهم گذرنده از مرکز المان را در نظر می گیریم و قصد داریم مقدار مومنتوم گذرنده از هرکدام از صفحات را محاسبه کنیم. فرض کنید که هرکدام از صفحات، مساحت سطح واحد دارند.
  - در شکل a
    - سرعت سیال عبوری $\times$ شار جرمی عبوری از صفحه $=$ شار مومنتوم عبوری از صفحه $= \rho v_x \underline{v}$
    - توجه بشه که این شار مومنتوم از ناحیه‌ی x کوچیکتر به ناحیه x بزرگتره.
  - به طور مشابه :
    - توی شکل b : شار مومنتوم عبوری از صفحه $= \rho v_y \underline{v}$
    - c ~ ~ : ~ ~ ~ ~ ~ $= \rho v_z \underline{v}$
  - این سه بردار را می‌توان به این صورت نیز بیان کرد :

$$\rho\underline{v}\,\underline{v} = \rho(v_x\underline{\delta}_x + v_y\underline{\delta}_y + v_z\underline{\delta}_z)\underline{v} = \underline{\delta}_x(\rho v_x\underline{v}) + \underline{\delta}_y(\rho v_y\underline{v}) + \underline{\delta}_z(\rho v_z\underline{v})$$

$$= \rho\sum_i\sum_j \underline{\delta}_i\underline{\delta}_j v_i v_j$$

$\rho\underline{v}\,\underline{v}$ → The Convective Momentum-Flux Tensor

③

- انتقال مومنتوم کل ← شار مومنتوم کل = شار مومنتوم مولکولی + شار مومنتوم توده‌ای

← پس می‌شه نوشت :

$$\underbrace{\underline{\underline{\phi}}}_{\text{Total momentum-flux tensor}} = \underbrace{\underline{\underline{\pi}}}_{\text{Molecular momentum-flux tensor}} + \underbrace{\rho \underline{v}\underline{v}}_{\text{convective momentum-flux tensor}}$$

$$\underline{\underline{\pi}} = \underbrace{\underline{\underline{\tau}}}_{\text{viscous momentum-flux tensor}} + \underbrace{p\underline{\underline{\delta}}}_{\text{pressure momentum-flux tensor}}$$

convective momentum-flux tensor

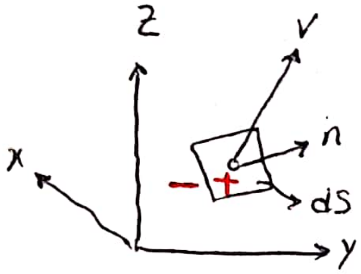
pressure 〃 - 〃 〃

viscous 〃 - 〃 〃

Molecular 〃 - 〃 〃

Total 〃 - 〃 〃

- انتقال مومنتوم عبوری از یه المان سطحی که جهت‌ش با بردار یکه‌ی عمود $\hat{\underline{n}}$ مشخص می‌شه رو حساب کنیم:



$$[\underline{n} \cdot \underline{\underline{\phi}}]\,dS$$

→ مومنتوم عبوری از سطح، از سمت سیال خلاف جهت بردار $\hat{\underline{n}}$ به سمت سیال در جهت بردار $\hat{\underline{n}}$

→ نیروی سطحی وارد به سیال سمت + از سیال سمت −