- سرفصل مطالب
  - موازنه مومنتوم پوسته‌ای
  - جریان یک فیلم ریزان
  - جریان داخل یه لوله استوانه‌ای
  - جریان دو سیال امتزاج ناپذیر

- مطالبی که توی این فصل بررسی می‌شن واسه‌ی حالت پایای جریانه (steady flow) می‌باشه. منظور از "steady" اینه که فشار، دانسیته و سرعت در هر نقطه از سیال با زمان تغییری نمی‌کنند.

① موازنه مومنتوم پوسته‌ای

- براساس قانون پایستاری مومنتوم (The Momentum Conservation Law)
  - واسه‌ی جریان حالت پایا، موازنه مومنتوم می‌شه:

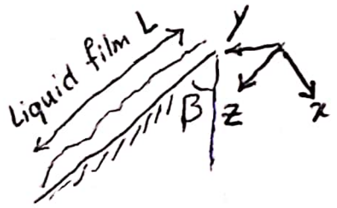
نرخ مومنتوم ورودی − نرخ مومنتوم خروجی + نیروهای حجمی = $\underline{0}$

  - که خود نرخ مومنتوم دو قسمت داره:

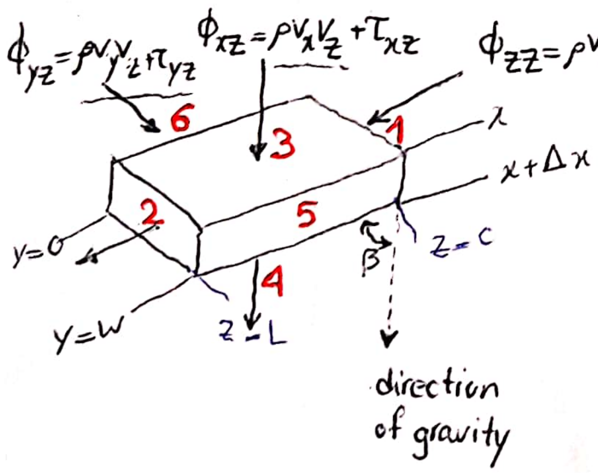
نرخ مومنتوم (ϕ) = نرخ مومنتوم مولکولی (π) + نرخ مومنتوم توده‌ای ($\rho\underline{v}\underline{v}$)

- برای اینکه با نحوه استفاده از رابطه فوق آشنا شویم، مسائل متفاوتی بررسی خواهد شد.

② جریان فیلم ریزان



- یه سطح شیب‌دار مانند شکل زیر رو در نظر بگیرین که طولش L و عرضش W ـه.
- برای حل این مسئله مختصات را مانند شکل در نظر می‌گیریم: یعنی z در راستای سطح، x عمود به سطح و y عمود به بیرون سطح
- از اثرات ابتدایی و انتهایی صرف‌نظر می‌شه (چون که $L+W \gg \delta$)
- سرعت توی راستای z (v_z) فقط تابعیت x داره: $v_x = v_y = 0 \;,\; v_z = v_z(x)$



- همچنین $P = P(x)$
- حال، موازنه مومنتوم را برای لایه نشان داده شکل می‌نویسیم.
- برای موازنه مومنتوم باید تمام مومنتوم‌های ورودی و خروجی به المان رو حساب کنیم:

$$\text{نرخ مومنتوم خروجی} - \text{نرخ مومنتوم ورودی} = \oint_{\text{سطح المان}} \underline{\hat{n}} \cdot \underline{\underline{\phi}}\, dS$$

$$= \oint_1 \underline{\hat{n}} \cdot \underline{\underline{\phi}}\, ds + \oint_2 \underline{\hat{n}} \cdot \underline{\underline{\phi}}\, ds + \oint_3 \underline{\hat{n}} \cdot \underline{\underline{\phi}}\, ds + \oint_4 \underline{\hat{n}} \cdot \underline{\underline{\phi}}\, ds + \oint_5 \underline{\hat{n}} \cdot \underline{\underline{\phi}}\, ds + \oint_6 \underline{\hat{n}} \cdot \underline{\underline{\phi}}\, ds$$

• که $\underline{\hat{n}}$ بردار یکه‌ی عمود به هر سطح با جهت داخل المان است.

- با توجه به مختصات اتخاذ شده :

$$\oint_{\text{سطح المان}} \hat{\underline{n}}\cdot\underline{\underline{\phi}}\,ds = \int_1 +\underline{\delta}_z\cdot\underline{\underline{\phi}}\,ds + \int_2 -\underline{\delta}_z\cdot\underline{\underline{\phi}}\,ds + \int_3 +\underline{\delta}_x\cdot\underline{\underline{\phi}}\,ds + \int_4 -\underline{\delta}_x\cdot\underline{\underline{\phi}}\,ds$$
$$+\int_5 +\underline{\delta}_y\cdot\underline{\underline{\phi}}\,ds + \int_6 -\underline{\delta}_y\cdot\underline{\underline{\phi}}\,ds$$

- خواهیم داشت :

$$\underline{\underline{\phi}} = \phi_{ij}\,\underline{\delta}_i\underline{\delta}_j$$

$$\underline{\delta}_x\cdot\underline{\underline{\phi}} = \underline{\delta}_1\cdot(\phi_{ij}\,\underline{\delta}_i\underline{\delta}_j) = \phi_{ij}\,\delta_{1i}\,\underline{\delta}_j = \phi_{1j}\,\underline{\delta}_j$$
$$= \phi_{xx}\underline{\delta}_x + \phi_{xy}\underline{\delta}_y + \phi_{xz}\underline{\delta}_z$$

$$\underline{\delta}_y\cdot\underline{\underline{\phi}} = \underline{\delta}_2\cdot(\phi_{ij}\,\underline{\delta}_i\underline{\delta}_j) = \phi_{ij}\,\delta_{2i}\,\underline{\delta}_j = \phi_{2j}\,\underline{\delta}_j$$
$$= \phi_{yx}\underline{\delta}_x + \phi_{yy}\underline{\delta}_y + \phi_{yz}\underline{\delta}_z$$

$$\underline{\delta}_z\cdot\underline{\underline{\phi}} = \underline{\delta}_3\cdot(\phi_{ij}\,\underline{\delta}_i\underline{\delta}_j) = \phi_{ij}\,\delta_{3i}\,\underline{\delta}_j = \phi_{3j}\,\underline{\delta}_j$$
$$= \phi_{zx}\underline{\delta}_x + \phi_{zy}\underline{\delta}_y + \phi_{zz}\underline{\delta}_z$$

- از سوی دیگر در معادله پایستاری مومنتوم

نیروی حجمی = نیروهای گرانشی = $\rho LW\Delta x\,\underline{g}$

با جایگذاری در معادله پایستاری مومنتوم:

$$\oint_{\text{سطح المان}} \hat{\underline{n}}\cdot\underline{\underline{\phi}}\,ds + \rho LW\Delta x\,\underline{g} = \underline{0}$$

معادله فوق یه معادله‌ی برداریه و سه تا مولفه‌ی x و y و z داره

تنها مولفه‌ای که اطلاعاتی برای v_z ارائه خواهد کرد، مولفه z می‌باشد. بنابراین معادله‌ی فوق را به صورت زیر با بردار $\underline{\delta}_z$ ضرب داخلی می‌کنیم تا مولفه‌ی z معادله بدست آید.

$$\Rightarrow \oint_{\text{سطح المان}} [\hat{\underline{n}}\cdot\underline{\underline{\phi}}]\cdot\underline{\delta}_z\,ds + \rho LW\Delta x\,\underline{g}\cdot\underline{\delta}_z = 0 \qquad (*)$$

که داریم :

$$\oint_{\text{سطح المان}} [\hat{\underline{n}}\cdot\underline{\underline{\phi}}]\cdot\underline{\delta}_z\,ds = \int_1 [+\underline{\delta}_z\cdot\underline{\underline{\phi}}]\cdot\underline{\delta}_z\,ds + \int_2 [-\underline{\delta}_z\cdot\underline{\underline{\phi}}]\cdot\underline{\delta}_z\,ds$$
$$+\int_3 [+\underline{\delta}_x\cdot\underline{\underline{\phi}}]\cdot\underline{\delta}_z\,ds + \int_4 [-\underline{\delta}_x\cdot\underline{\underline{\phi}}]\cdot\underline{\delta}_z\,ds$$
$$+\int_5 [+\underline{\delta}_y\cdot\underline{\underline{\phi}}]\cdot\underline{\delta}_z\,ds + \int_6 [-\underline{\delta}_y\cdot\underline{\underline{\phi}}]\cdot\underline{\delta}_z\,ds$$

که در اینجا :

$$[\underline{\delta}_x\cdot\underline{\underline{\phi}}]\cdot\underline{\delta}_z = (\phi_{1j}\,\underline{\delta}_j)\cdot\underline{\delta}_3 = \phi_{1j}\,\delta_{j3} = \phi_{13} = \phi_{xz}$$
$$[\underline{\delta}_y\cdot\underline{\underline{\phi}}]\cdot\underline{\delta}_z = (\phi_{2j}\,\underline{\delta}_j)\cdot\underline{\delta}_3 = \phi_{2j}\,\delta_{j3} = \phi_{23} = \phi_{yz}$$
$$[\underline{\delta}_z\cdot\underline{\underline{\phi}}]\cdot\underline{\delta}_z = (\phi_{3j}\,\underline{\delta}_j)\cdot\underline{\delta}_3 = \phi_{3j}\,\delta_{j3} = \phi_{33} = \phi_{zz}$$

همچنین .

$$\underline{g}\cdot\underline{\delta}_z = (g_i\,\underline{\delta}_i)\cdot\underline{\delta}_3 = g_i\,\delta_{i3} = g_3 = g_z$$

(2)

حالا اگه اینا رو توی معادله (*) جاگذاری کنیم ،

$$\int_1 \phi_{zz}\, ds + \int_2 -\phi_{zz}\, ds + \int_3 \phi_{xz}\, ds + \int_4 -\phi_{xz}\, ds + \int_5 \phi_{yz}\, ds$$
$$+\int_6 -\phi_{yz}\, ds + \rho L w \Delta x g_z = 0 \qquad \boxed{**}$$

حال به محاسبه ی مولفه های مورد نیاز $\underline{\underline{\phi}}$ می پردازیم ($\underline{\underline{\phi}} = \underline{\underline{\tau}} + \rho \underline{v}\underline{v} + p\underline{\underline{\delta}}$) :

$$\phi_{xz} = \tau_{xz} + \rho v_x v_z + p\delta_{xz} = \tau_{xz} + \rho v_x v_z$$

$$\phi_{yz} = \tau_{yz} + \rho v_y v_z + p\delta_{yz} = \tau_{yz} + \rho v_y v_z$$

$$\phi_{zz} = \tau_{zz} + \rho v_z v_z + p\delta_{zz} = \tau_{zz} + \rho v_z v_z + p$$

با توجه به اینکه

$$\tau_{ij} = -\mu\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) + \left(\frac{2}{3}\mu - k\right)\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)\delta_{ij}$$

در نتیجه :

$$\tau_{xz} = -\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right), \quad \tau_{yz} = -\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)$$
$$\tau_{zz} = -\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

از طرفی :

$$v_x = v_y = 0 \quad , \quad v_z = v_z(x)$$

در نتیجه :

$$\tau_{yz} = \tau_{zz} = 0, \quad \tau_{xz} = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial x}$$

$$\phi_{xz} = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad , \quad \phi_{yz} = 0 \quad , \quad \phi_{zz} = \rho v_z v_z + p$$

بنابراین :

حال به محاسبه ی انتگرال های می پردازیم :

$$\int_1 \phi_{zz}\, ds = \int_1 (\rho v_z v_z + p)\, dS = [\rho v_z v_z + p]_{z=0}\, w\Delta x$$

$$\int_2 -\phi_{zz}\, dS = \int_2 -(\rho v_z v_z + p)\, dS = -[\rho v_z v_z + p]_{z=L}\, w\Delta x$$

$$\int_3 \phi_{xz}\, dS = \int_3 \left(-\mu \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) dS = \left(-\mu \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)_{x=0} wL$$

$$\int_4 -\phi_{xz}\, dS = \int_4 -\left(-\mu \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) dS = \left(\mu \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)_{x=\delta} wL$$

$$\int_5 \phi_{yz}\, ds + \int_6 -\phi_{yz}\, dS = 0$$

با جایگذاری در معادله $\boxed{**}$:

$$[\rho V_z V_z + P]_{z=0} W\Delta x - [\rho V_z V_z + P]_{z=L} W\Delta x + [-\mu \frac{\partial V_z}{\partial x}]_x WL +$$
$$[\mu \frac{\partial V_z}{\partial x}]_{x+\Delta x} WL + \rho L W \Delta x g_z = 0$$

$$\xrightarrow{\div WL\Delta x} \quad \frac{(\rho V_z V_z + P)_{z=0} - (\rho V_z V_z + P)_{z=L}}{L} + \frac{(-\mu \frac{\partial V_z}{\partial x})_x - (-\mu \frac{\partial V_z}{\partial x})_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \rho g_z = 0$$

$$\xrightarrow{\lim_{\Delta x \to 0}} \quad \frac{(\rho V_z V_z + P)_{z=0} - (\rho V_z V_z + P)_{z=L}}{L} + \mu \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \rho g \cos\beta = 0$$

$$\xrightarrow[P=P(x)]{V_z = V_z(x)} \quad \mu \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} = -\rho g \cos\beta \implies \frac{d^2 V_z}{dx^2} = -\frac{\rho g}{\mu}\cos\beta$$

شرایط مرزی :

$$\begin{cases} @\ x=0 : & \frac{dV_z}{dx} = 0 \\ @\ x=\delta : & V_z = 0 \end{cases}$$

سرانجام :

$$V_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos\beta}{2\mu}\left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right]$$

- حال که توزیع سرعت مشخص شد، کمیت های متعددی رو میشه حساب کرد :

(1) سرعت بیشینه — مشخصه که سرعت توی $x=0$; max

پس :

$$V_{z,max} = V_z\big|_{x=0} \implies V_{z,max} = \frac{\rho g \delta^2}{2\mu}\cos\beta$$

(2) سرعت متوسط :

$$\langle V_z \rangle = \frac{\int_0^W \int_0^\delta V_z \, dx\,dy}{\int_0^W \int_0^\delta dx\,dy} = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta V_z \, dx = \frac{\rho g \delta^2 \cos\beta}{2\mu}\int_0^1 \left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right] d\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

$$\implies \langle V_z \rangle = \frac{\rho g \delta^2}{3\mu}\cos\beta = \frac{2}{3} V_{z,max}$$

(3) نرخ جریان

$$\omega = \int_0^W \int_0^\delta \rho V_z \, dx\,dy = \rho W \delta \frac{\int_0^W \int_0^\delta V_z \, dx\,dy}{\int_0^W \int_0^\delta dx\,dy} = \rho W \delta \langle V_z \rangle$$

$$\implies \omega = \frac{\rho^2 g W \delta^3}{3\mu}\cos\beta$$

(4) ضخامت فیلم :

$$\delta = \sqrt{\frac{3\mu \langle V_z \rangle}{\rho g \cos\beta}} = \sqrt[3]{\frac{3\mu\omega}{\rho^2 g W \cos\beta}}$$

(3)

(5) نیروی وارد شونده از سیال به دیواره :

$$\underline{F} = \int_{\text{سطح دیواره}} \hat{n}\cdot\underline{\underline{\phi}}\, ds = \int_{\text{سطح دیواره}} +\underline{\delta}_x\cdot\underline{\underline{\phi}}\, ds$$

$$\underline{\delta}_x\cdot\underline{\underline{\phi}} = \phi_{xx}\underline{\delta}_x + \phi_{xy}\underline{\delta}_y + \phi_{xz}\underline{\delta}_z$$

مولفه‌ی z نیرو رو می‌خوایم محاسبه کنیم ،

$$F_z = \underline{F}\cdot\underline{\delta}_z = \int_{\text{سطح دیواره}} (\underline{\delta}_x\cdot\underline{\underline{\phi}})\cdot\underline{\delta}_z\, ds = \int_{\text{سطح دیواره}} \phi_{xz}\, ds$$

$$= \int_{\text{سطح دیواره}} \left(-\mu \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\Big|_{x=\delta} ds = \int_{y=0}^{W}\int_{z=0}^{L} \left(-\mu\frac{dV_z}{dx}\right)_{x=\delta} dy\,dz$$

$$= \int_{y=0}^{W}\int_{z=0}^{L} \left(+\mu \frac{\rho g\delta\cos\beta}{\mu}\right) dy\,dz \Rightarrow F_z = +\rho g \delta L W\cos\beta$$

ـ نتایج تجربی روی فیلم ریزان ← نشون می‌ده که سه رژیم جریانی قابل مشاهده است :

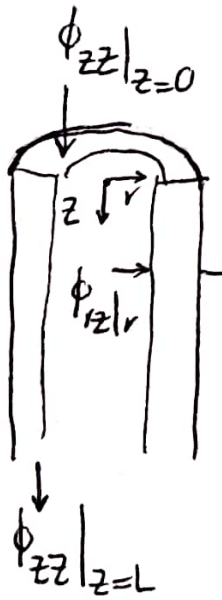
laminar flow with negligible ripples : $Re<20$

" " pronounced rippling : $20<Re<1500$

turbulent flow : $1500<Re$

$$Re = 4\delta\langle v_z\rangle \frac{\rho}{\mu}$$

آنالیزی که ما بیشتر انجام دادیم در گستره‌ی رژیم اول قرار می‌گیره .



(3) جریان داخل یه لوله‌ی استوانه‌ای

ـ یه لوله‌ی استوانه‌ای عمودی رو در نظر بگیرید که یه سیال با دانسیته ρ و ویسکوزیته μ توش جریان داره

ـ سیالی تحت یه گرادیان فشار و نیروی گرانشی به سوی پایین جریان داره.

ـ فرض می‌کنیم که طول لوله در مقابل شعاعش خیلی بزرگه که از اثرات انتهایی و ابتدایی صرف‌نظر کنیم

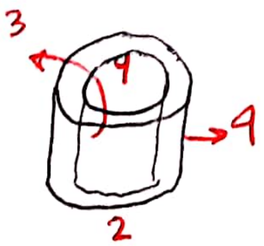
ـ داریم : $V_r = V_\theta = 0$, $V_z = V_z(r)$, $P = P(z)$

ـ قصد داریم قانون پایستاری مومنتوم رو به ازای المان حجمی ترسیم شده در شکل پیاده کنیم .

نرخ مومنتوم ورودی - نرخ مومنتوم خروجی + نیروهای حجمی = $\underset{\text{S.S.}}{0}$

ـ که توش " - " = $\oint_{\text{سطح}} \hat{n}\cdot\underline{\underline{\phi}}\, ds$

$\hat{n}$ بردار یکه عمود به سطح به داخل المانه



$$\oint_{\text{سطح}} \hat{n}\cdot\underline{\underline{\phi}}\, ds = \int_1 \hat{n}\cdot\underline{\underline{\phi}}\, ds + \int_2 \hat{n}\cdot\underline{\underline{\phi}}\, ds + \int_3 \hat{n}\cdot\underline{\underline{\phi}}\, ds + \int_4 \hat{n}\cdot\underline{\underline{\phi}}\, ds$$

که با توجه به مختصات استوانه‌ای شکل : $\hat{n}_1 = \underline{\delta}_z$, $\hat{n}_2 = -\underline{\delta}_z$, $\hat{n}_3 = \underline{\delta}_r$, $\hat{n}_4 = -\underline{\delta}_r$

- پس نیازه که $\underline{\delta}_z \cdot \underline{\underline{\phi}}$ و $\underline{\delta}_r \cdot \underline{\underline{\phi}}$ رو حساب کنیم:

$$\underline{\underline{\phi}} = \phi_{rr}\underline{\delta}_r\underline{\delta}_r + \phi_{r\theta}\underline{\delta}_r\underline{\delta}_\theta + \phi_{rz}\underline{\delta}_r\underline{\delta}_z + \phi_{\theta r}\underline{\delta}_\theta\underline{\delta}_r + \phi_{\theta\theta}\underline{\delta}_\theta\underline{\delta}_\theta + \phi_{\theta z}\underline{\delta}_\theta\underline{\delta}_z$$
$$+\phi_{zr}\underline{\delta}_z\underline{\delta}_r + \phi_{z\theta}\underline{\delta}_z\underline{\delta}_\theta + \phi_{zz}\underline{\delta}_z\underline{\delta}_z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{\delta}_r \cdot \underline{\underline{\phi}} = \phi_{rr}\underline{\delta}_r + \phi_{r\theta}\underline{\delta}_\theta + \phi_{rz}\underline{\delta}_z \\ \underline{\delta}_z \cdot \underline{\underline{\phi}} = \phi_{zr}\underline{\delta}_r + \phi_{z\theta}\underline{\delta}_\theta + \phi_{zz}\underline{\delta}_z \end{cases}$$

$\int_V \rho \underline{g} dV$

- توجه بشه که: نیروهای حجمی $= \rho(2\pi r)L\Delta r\underline{g}$

$$\Rightarrow \int_1 \underline{\delta}_z \cdot \underline{\underline{\phi}}\, ds + \int_2 -\underline{\delta}_z \cdot \underline{\underline{\phi}}\, ds + \int_3 \underline{\delta}_r \cdot \underline{\underline{\phi}}\, ds + \int_4 -\underline{\delta}_r \cdot \underline{\underline{\phi}}\, ds + 2\pi r L\Delta r\rho\underline{g} = \underline{0}$$

- تنها مولفه‌ی z این معادله واسه‌ی محاسبه‌ی توزیع سرعت می‌تونه استفاده بشه:

$$\Rightarrow \int_1 (\underline{\delta}_z \cdot \underline{\underline{\phi}})\cdot\underline{\delta}_z ds + \int_2 -(\underline{\delta}_z \cdot \underline{\underline{\phi}})\cdot\underline{\delta}_z ds + \int_3 (\underline{\delta}_r \cdot \underline{\underline{\phi}})\cdot\underline{\delta}_z ds + \int_4 -(\underline{\delta}_r \cdot \underline{\underline{\phi}})\cdot\underline{\delta}_z ds + 2\pi r L\Delta r\rho\underline{g}\cdot\underline{\delta}_z = 0$$

$$(\underline{\delta}_z \cdot \underline{\underline{\phi}})\cdot\underline{\delta}_z = \phi_{zz}$$
$$(\underline{\delta}_r \cdot \underline{\underline{\phi}})\cdot\underline{\delta}_z = \phi_{rz}$$

- برای ساده‌سازی

$$\underline{\underline{\phi}} = \underline{\underline{\tau}} + p\underline{\underline{\delta}} + \rho\underline{v}\underline{v}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \phi_{zz} = \tau_{zz} + p\delta_{zz} + \rho v_z v_z \\ \phi_{rz} = \tau_{rz} + p\delta_{rz} + \rho v_r v_z \end{cases} \xrightarrow[v_r=0]{\delta_{rz}=0} \begin{cases} \phi_{zz} = \tau_{zz} + p + \rho v_z v_z \\ \phi_{rz} = \tau_{rz} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_{zz} = -\mu\left[2\frac{\partial v_z}{\partial z}\right] + \left(\frac{2}{3}\mu - k\right)\underline{\nabla}\cdot\underline{v} \\ \tau_{rz} = -\mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \\ \underline{\nabla}\cdot\underline{v} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau_{zz} = 0 \\ \tau_{rz} = -\mu\frac{\partial v_z}{\partial r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_{zz} = p + \rho v_z v_z \\ \phi_{rz} = -\mu\frac{\partial v_z}{\partial r} \end{cases}$$

- با جایگذاری:

$$\Rightarrow \int_1 (p + \rho v_z v_z) ds - \int_2 (p + \rho v_z v_z) ds + \int_3 \left(-\mu\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) ds$$
$$-\int_4 \left(-\mu\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) ds + 2\pi r L\Delta r\rho g_z = 0$$

$$\xrightarrow{\int} 2\pi r\Delta r\left[(p + \rho v_z v_z)_{z=0} - (p + \rho v_z v_z)_{z=L}\right] + 2\pi r L\left[\left(-\mu\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)_r - \left(-\mu\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)_{r+\Delta r}\right]$$
$$+ 2\pi r L\Delta r\rho g_z = 0$$

④

$$\xrightarrow{\div 2\pi r L \Delta r} \quad \frac{(P+\rho v_z v_z)_{z=0}-(P+\rho v_z v_z)_{z=L}}{L}+\frac{\left(-\mu\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)_r-\left(-\mu\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)_{r+\Delta r}}{\Delta r}+\rho g_z=0$$

$$\xrightarrow{\lim_{\Delta r\to 0}} \quad \frac{P_{z=0}-P_{z=L}}{L}+\mu\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\rho g_z=0$$

$$\Longrightarrow \mu\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}=\frac{P_{z=L}-P_{z=0}}{L}-\rho g_z$$

$$\mathcal{P}_z=P_z-\rho g_z \quad \Longrightarrow \quad \mu\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}=\frac{\mathcal{P}_{z=L}-\mathcal{P}_{z=0}}{L}$$

↓
modified Pressure

B.C. | @ $r=0$: $\frac{\partial v_z}{\partial r}=\text{finite}$
| @ $r=R$: $v_z=0$

$$\Longrightarrow v_z=\left(\frac{\mathcal{P}_0-\mathcal{P}_L}{4\mu L}\right)R^2\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

- حالا بریم سراغ بقیه ی کمیت ها :

① سرعت بیشینه :

$$v_{z,max}=v_z\big|_{r=0}=\left(\frac{\mathcal{P}_0-\mathcal{P}_L}{4\mu L}\right)R^2$$

② سرعت متوسط :

$$\langle v_z\rangle=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R v_z\, r\,dr\,d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^R r\,dr\,d\theta}=\left(\frac{\mathcal{P}_0-\mathcal{P}_L}{8\mu L}\right)R^2=\frac{1}{2}v_{z,max}$$

③ نرخ جرمی جریان :

$$\omega=\pi R^2\rho\langle v_z\rangle=\rho\pi\left(\frac{\mathcal{P}_0-\mathcal{P}_L}{8\mu L}\right)R^4$$ The Hagen-Poiseuille eq.

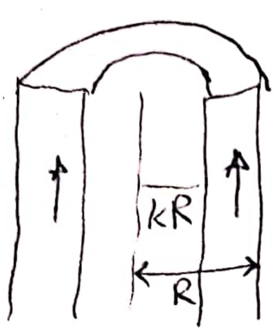
④ جزء z نیروی اعمالی از سیال به سطح لوله :

$$F_z=\underline{F}\cdot\underline{\delta}_z=\oint_{\text{سطح داخلی لوله}}(\underline{\hat{n}}\cdot\underline{\underline{\phi}})\cdot\underline{\delta}_z\,ds$$

$$=\int_{\text{سطح داخلی}}(\underline{\delta}_r\cdot\underline{\underline{\phi}})\cdot\underline{\delta}_z\,ds=\int_{\text{سطح داخلی}}(\phi_{rz})_{r=R}\,ds=\int\left(-\mu\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)_{r=R}ds$$

$$=\left(-\mu\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)_{r=R}\cdot(2\pi RL)=\pi R^2(\mathcal{P}_0-\mathcal{P}_L)$$

④ جریان بین استوانه‌ای



- قصد داریم جریان ویسکوز یه سیالی بین دو استوانه‌ی هم مرکز جریان داره
- سیال بین دو استوانه برخلاف جهت گرانش به سمت بالا حرکت می‌کنه
- از اثرات ابتدایی و انتهایی صرف نظر کنیم
- داریم: $v_r = v_\theta = 0 \;,\; v_z = v_z(r) \;,\; P = P(z)$
- اگه یه المان استوانه‌ای نازک از سیال رو مثل شکل در نظر بگیریم، با نوشتن قانون پایستاری مومنتوم، از مولفه‌ی z معادله‌ی برداری حاصل خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{L} r$$

$$\xrightarrow{\int} \tau_{rz} = \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2L} r + \frac{C_1}{r}$$

که $\mathcal{P} = \rho g z$

$$B.C.: @\ r = \lambda R : \quad \tau_{rz} = 0 \implies \underline{C_1 = -\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2L}(\lambda R)^2}$$

$$\implies \tau_{rz} = \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2L} R\left[\left(\frac{r}{R}\right) - \lambda^2\left(\frac{R}{r}\right)\right]$$

$$\xrightarrow{\tau_{rz} = -\mu\frac{dv_z}{dr}} \frac{dv_z}{dr} = -\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2\mu L} R\left[\left(\frac{r}{R}\right) - \lambda^2\left(\frac{R}{r}\right)\right]$$

$$\xrightarrow{\int} v_z = -\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{4\mu L} R^2\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\lambda^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right) + C_2\right]$$

$$B.C.: \ @\ r = kR,\ r = R: \ v_z = 0 \implies \underline{C_2 = -1} \ ,\ 2\lambda^2 = \frac{1-k^2}{\ln \frac{1}{k}}$$

$$\implies \left| \begin{array}{l} \tau_{rz} = \dfrac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2L} R\left[\left(\dfrac{r}{R}\right) - \dfrac{1-k^2}{2\ln\frac{1}{k}}\left(\dfrac{R}{r}\right)\right] \\[2ex] v_z = \dfrac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{4\mu L} R^2\left[1 - \left(\dfrac{r}{R}\right)^2 - \dfrac{1-k^2}{\ln\frac{1}{k}} \ln\left(\dfrac{R}{r}\right)\right] \end{array} \right.$$

- بقیه‌ی کمیت‌ها:

① سرعت بیشینه:

$$v_{z,max} = v_z\big|_{r=\lambda R} = \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{4\mu L} R^2\left[1 - \lambda^2(1 - \ln\lambda^2)\right]$$

② 〃 متوسط:

$$\langle v_z \rangle = \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{8\mu L} R^2\left[\frac{1-k^4}{1-k^2} - \frac{1-k^2}{\ln\frac{1}{k}}\right]$$

③ نرخ جرمی جریان:

$$w = \pi R^2(1-k^2)\rho\langle v_z\rangle = \frac{\pi(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)}{8\mu L}\rho R^4\left[(1-k^4) - \frac{(1-k^2)^2}{\ln\frac{1}{k}}\right]$$

4 نیروی اعمال شونده از سیال به دیواره های استوانه داخلی و بیرونی :

$$F_z = \underline{F}\cdot\underline{\delta}_z = \Big[\int_{\text{دیواره بیرونی}} \underline{\hat{n}}\cdot\underline{\underline{\phi}}\,ds + \int_{\text{دیواره درونی}} \underline{\hat{n}}\cdot\underline{\underline{\phi}}\,ds\Big]\cdot\underline{\delta}_z$$

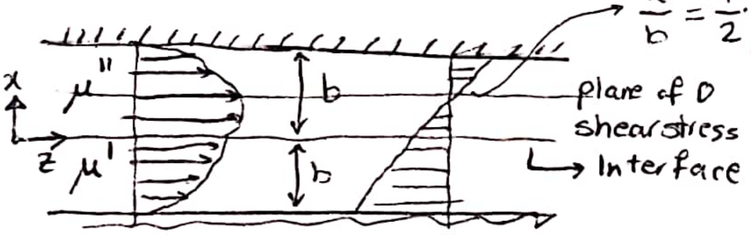
$$= \int_{\text{بیرونی}} (\underline{\delta}_r\cdot\underline{\underline{\phi}})\cdot\underline{\delta}_z\,ds + \int_{\text{درونی}} -(\underline{\delta}_r\cdot\underline{\underline{\phi}})\cdot\underline{\delta}_z\,ds = \int_{\text{بیرونی}} \tau_{rz}\Big|_{\text{بیرونی}} ds - \int_{\text{درونی}} \tau_{rz}\Big|_{\text{درونی}} ds$$

$$= -\mu \frac{dV_z}{dr}\Big|_{r=R}(2\pi RL) + \mu\frac{dV_z}{dr}\Big|_{r=kR}(2\pi kRL)$$

$$\Rightarrow\quad F_z = \pi R^2(1-k^2)(P_0 - P_L)$$

5 جریان دو سیال امتزاج ناپذیر

$$\frac{x}{b} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mu'-\mu''}{\mu'+\mu''}$$



- دو سیال تراکم ناپذیر و امتزاج ناپذیر در جهت z به یه slit افقی با طول L و عرض W تحت تأثیر یه گرادیان فشار افقی $\frac{P_0-P_L}{L}$ جریان دارن. نصفه کانال توسط سیال I و نصفه دیگه از سیال II پر شده. مرز بین دو سیال مسطحه
- اگه موازنه مومنتوم رو واسه ی هر کدوم از لایه ها بنویسیم، به این معادله دیفرانسیل می رسیم:

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \frac{P_0-P_L}{L}$$

- که این معادله رو می شه واسه ی هر کدوم از فازها استفاده کرد:

$$\begin{cases}\tau_{xz}^{I} = \left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)x + C_1^{I}\\[2mm] \tau_{xz}^{II} = \left(\frac{P_0-P_L}{L}\right)x + C_1^{II}\end{cases}$$

B.C. : @ $x=0$: $\tau_{xz}^{I} = \tau_{xz}^{II} \Rightarrow C_1^{I} = C_1^{II} = C_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\mu^{I}\frac{dV_z^{I}}{dx} = \frac{P_0-P_L}{L}x + C_1\\[2mm] -\mu^{II}\frac{dV_z^{II}}{dx} = \frac{P_0-P_L}{L}x + C_1\end{cases} \overset{\int}{\Longrightarrow} \begin{cases} V_z^{I} = -\frac{P_0-P_L}{2\mu^{I}L}x^2 - \frac{C_1}{\mu^{I}}x + C_2^{I}\\[2mm] V_z^{II} = -\frac{P_0-P_L}{2\mu^{II}L}x^2 - \frac{C_1}{\mu^{II}}x + C_2^{II}\end{cases}$$

B.C. #1: @ $x=0$: $V_z^{I} = V_z^{II} \Rightarrow C_2^{I} = C_2^{II}$

B.C # 2: @ $x=-b$: $V_z^{I} = 0$

B.C # 3: @ $x=+b$: $V_z^{II} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{P_0-P_L}{2L}\,b\,\frac{\mu^{I}-\mu^{II}}{\mu^{I}+\mu^{II}}\\[2mm] C_2^{I} = C_2^{II} = \frac{P_0-P_L}{2\mu^{I}L}b^2\,\frac{2\mu^{I}}{\mu^{I}+\mu^{II}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad \tau_{xz} = \frac{P_0-P_L}{L}\,b\left[\frac{x}{b} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\mu'-\mu''}{\mu'+\mu''}\right]$$

$$\begin{cases} V_z' = \frac{P_0-P_L}{2\mu' L}b^2\left[\frac{2\mu'}{\mu'+\mu''} + \frac{\mu'-\mu''}{\mu'+\mu''}\cdot\frac{x}{b} - \left(\frac{x}{b}\right)^2\right]\\[2mm] V_z'' = \frac{P_0-P_L}{2\mu'' L}b^2\left[\frac{2\mu''}{\mu'+\mu''} + \frac{\mu'-\mu''}{\mu'+\mu''}\cdot\frac{x}{b} - \left(\frac{x}{b}\right)^2\right]\end{cases}$$