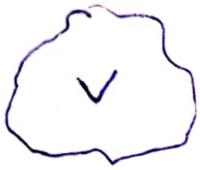
- سرفصل مطالب این فصل:
  - معادله پیوستگی
  - معادله حرکت
  - معادلات پیوستگی و حرکت با استفاده از مختصات مادی
  - حل مسائل مکانیک سیالاتی با استفاده از معادلات پیوستگی و حرکت
  - آنالیز ابعادی معادلات پیوستگی و حرکت

1 معادله پیوستگی

- این معادله در واقع پایستاری جرم را بیان می‌کند. برای بدست آوردن این معادله المان زیر را در نظر بگیرید:



- قانون پایستاری جرم برای این المان حجمی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\underbrace{\text{تجمع جرم در المان حجمی}}_{1} = \underbrace{\text{جرم ورودی به v.e.} - \text{جرم خروجی از v.e.}}_{2} + \cancel{\text{جرم تولیدی در v.e.}} - \cancel{\text{جرم مصرفی در v.e.}}$$

1 : تجمع جرم در v.e. $= \dfrac{\partial}{\partial t}\Big[\underbrace{\oint_V \rho\, dV}_{\text{جرم موجود در المان حجمی}}\Big]$

2 : جرم ورودی به v.e. − جرم خروجی از v.e. $= -\oint_S (\rho \underline{V})\cdot \underbrace{\hat{\underline{n}}}_{\text{بردار یکه عمود به سطح با جهت outward}}\, ds$

- ~~با استفاده از~~ بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[\oint_V \rho\, dV\Big] = -\oint_S (\rho \underline{V})\cdot \hat{\underline{n}}\, ds$$

- قضیه دیورژانس:
  - وسیله‌ی تبدیل انتگرال سطحی به حجمی و بالعکس وسیله‌ی حجمی به سطحی
  - صورتش:

$$\oint_V \underline{\nabla}\cdot \underline{A}\, dV = \oint_S \underline{A}\cdot \hat{\underline{n}}\, ds$$

$$\oint_V \underline{\nabla}\cdot \underline{\underline{C}}\, dV = \oint_S \hat{\underline{n}}\cdot \underline{\underline{C}}\, ds$$

- با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس:

$$\oint_S (\rho \underline{V})\cdot \hat{\underline{n}}\, ds = \oint_V \underline{\nabla}\cdot(\rho \underline{V})\, dV$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\Big[\oint_V \rho\, dV\Big] = -\oint_V \underline{\nabla}\cdot(\rho \underline{V})\, dV \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\Big[\oint_V \rho\, dV\Big] + \oint_V \underline{\nabla}\cdot(\rho \underline{V})\, dV = 0$$

- المان حجمی وابسته به زمان نیست، پس:

$$\Longrightarrow \oint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \oint_V \underline{\nabla}\cdot(\rho \underline{V})\, dV = 0$$

$$\Longrightarrow \oint_V \Big[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\rho \underline{V})\Big] dV = 0$$

- از معادله‌ی فوق دو برداشت می‌شه کرد:
  1. در تمامی نقاط: $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\rho \underline{V}) = 0$
  2. ممکنه توی نقاطی بزرگتر از صفر و بعضی جاها کوچکتر از صفر باشه که نتیجتاً $\oint_V$ روی تمام نقاط صفر بشه

ـ که برداشت دوم صحیح است چون اگه روی یه سری نقطه ، $\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \underline{v}) \lessgtr 0$ باشه ، با توجه به دلخواه بودن حجم المان انتخاب شده ، اگه اون یه سری نقطه رو انتخاب کنیم ، به تناقض می‌رسیم . پس :

ـ معادله دیفرانسیلی پیوستگی ← خود معادله :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v}) = 0$$

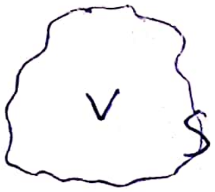
← واسه سیال تراکم ناپذیر $(\rho = \text{constant})$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v}) = 0$$

$$\Rightarrow \rho (\underline{\nabla} \cdot \underline{v}) = 0 \Rightarrow \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$$

② معادله حرکت

ـ برای اینکه معادله حرکت یه سیال رو بدست بیاریم، موازنه مومنتوم رو واسه یه المان حجمی به شکل زیر می‌نویسیم :



ـ قانون پایستاری مومنتوم واسه این المان حجمی می‌شه :

$$\underbrace{\text{تجمع مومنتوم در v.e.}}_{①} = \underbrace{\text{مومنتوم ورودی به v.e.} - \text{مومنتوم خروجی از v.e.}}_{②} + \underbrace{\text{نیروهای حجمی وارده به المان حجمی}}_{③}$$

① تجمع مومنتوم در المان حجمی $= \frac{\partial}{\partial t}\left[\oint_V \rho \underline{v} \, dv\right]$

② مومنتوم ورودی ـ خروجی $= -\oint_S \underline{\hat{n}} \cdot \underline{\underline{\phi}} \, ds$ $\quad (\underline{\hat{n}}:$ outward بردار یکه ی عمود بر سطح با جهت $)$

③ نیروهای حجمی وارده $= \oint_V \rho \underline{g} \, dv$

ـ با استفاده از قضیه ی دیورژانس :

$$\oint_S \underline{\hat{n}} \cdot \underline{\underline{\phi}} \, ds = \oint_V \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\phi}} \, dV$$

ـ بنابراین :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\oint_V \rho \underline{v} \, dv\right] = -\oint_V \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\phi}} \, dv + \oint_V \rho \underline{g} \, dv$$

$$\Rightarrow \oint_V \left[\frac{\partial (\rho \underline{v})}{\partial t} + (\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\phi}}) - \rho \underline{g}\right] dv = 0$$

$$\xrightarrow{\text{المان حجمی دلخواهه}} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v}) + (\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\phi}}) - \rho \underline{g} = \underline{0}$$

ـ قبلن داشتیم که :

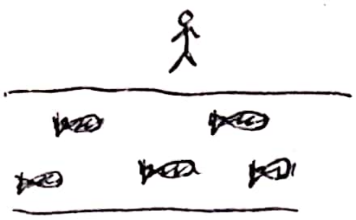
$$\underline{\underline{\phi}} = \underline{\underline{\tau}} + p \underline{\underline{\delta}} + \rho \underline{v}\,\underline{v}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v}) + (\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau}}) + \underline{\nabla} p + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v}\,\underline{v}) - \rho \underline{g} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v})}_{\text{تجمع مومنتوم}} = \underbrace{-(\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau}}) - \underline{\nabla} p}_{\text{نرخ افزایش مومنتوم توسط انتقال مولکولی}} - \underbrace{\underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v}\,\underline{v})}_{\text{نرخ افزایش مومنتوم توسط انتقال توده ای}} + \underbrace{\rho \underline{g}}_{\text{نیروی گرانش اعمال شونده بر سیال}}$$

3 معادلات پیوستگی و حرکت برحسب مشتقات مادی

3-1 مقدمه ریاضی

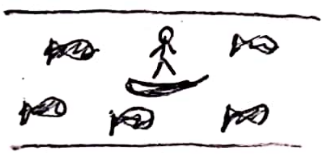


- قصد داریم مشتقات مادی را با یه مثال توضیح بدیم. برای این منظور، د نظر بگیرید که در کنار رودخانه‌ای ایستاده اید و تغییرات غلظت ماهی‌ها را اندازه می‌گیرید.

غلظت ماهی‌ها

$$\left.\frac{\partial c}{\partial t}\right|_{x,y,z}$$

نتیجه‌ی اندازه‌گیری شما : the partial time derivative of c with respect to t, @ constant x,y, and z.



- حال فرض کنید که بر روی یه قایق نشسته اید و تغییرات غلظت ماهی‌ها را اندازه‌گیری می‌کنید

$$\underbrace{\frac{dc}{dt}}_{\text{The total time derivative}}=\left(\frac{\partial c}{\partial t}\right)_{x,y,z}+\frac{dx}{dt}\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_{y,z,t}+\frac{dy}{dt}\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_{x,z,t}+\frac{dz}{dt}\left(\frac{\partial c}{\partial z}\right)_{x,y,t}$$

The total time derivative

اجزای سرعت قایق

- حال فرض کنید که شما (observer) با سرعت جریان v حرکت می‌کنید. در این صورت، نتیجه‌ی اندازه‌گیری شما خواهد بود:

$$\frac{Dc}{Dt}=\frac{\partial c}{\partial t}+v_x\frac{\partial c}{\partial x}+v_y\frac{\partial c}{\partial y}+v_z\frac{\partial c}{\partial z}=\frac{\partial c}{\partial t}+\underline{v}\cdot\underline{\nabla}c$$

the material (substantial) derivative: یعنی $\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\underline{v}\cdot\underline{\nabla}$ که یه اپراتور

3-2 معادله پیوستگی

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{v})$$

$$\underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{v})=\rho\,\underline{\nabla}\cdot\underline{v}+\underline{v}\cdot\nabla\rho$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t}=-\rho\,\underline{\nabla}\cdot\underline{v}-\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\rho$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t}+\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\rho=-\rho\,\underline{\nabla}\cdot\underline{v}$$

$$\Rightarrow \frac{D\rho}{Dt}=-\rho\,\underline{\nabla}\cdot\underline{v}$$

3-3 معادله حرکت

- خود معادله:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\underline{v})=-\underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{v}\,\underline{v})-\underline{\nabla}p-\underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\tau}}+\rho\underline{g}$$

$$\underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{v}\,\underline{v})=\left(\underline{\delta}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\cdot\left(\rho v_j v_k\underline{\delta}_j\underline{\delta}_k\right)=\delta_{ij}\underline{\delta}_k\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_j v_k)=\underline{\delta}_k\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i v_k)$$

$$=\underline{\delta}_k\left[v_k\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i)+\rho v_i\frac{\partial}{\partial x_i}(v_k)\right]=\underline{\delta}_k\left[v_k\underline{\nabla}\cdot(\rho v_i)+\rho v_i\underline{\nabla}v_k\right]$$

$$=\cancel{\nabla}\,\underline{v}\cdot\underline{\nabla}(\rho\underline{v})+\rho\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\underline{v}\ \xrightarrow{\text{continuity}}\ -\underline{v}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\underline{v}\,\underline{\nabla}\underline{v}$$

ـ جایگزینی در خود معادله،

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v}) = \underline{v}\frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v} - \underline{\nabla} p - \underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\tau}} + \rho \underline{g}$$

$$\Rightarrow \rho\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v}\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} = \underline{v}\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} - \rho \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v} - \underline{\nabla} p - \underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\tau}} + \rho \underline{g}$$

$$\Rightarrow \rho\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v} = -\underline{\nabla} p - \underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\tau}} + \rho \underline{g}$$

$$\Rightarrow \rho\frac{D\underline{v}}{Dt} = -\underline{\nabla} p - \underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\tau}} + \rho \underline{g}$$

ـ حالا می‌پردازیم به حالات خاص معادله حرکت

$\boxed{3-3-1}$ μ و ρ ثابت

$$\underline{\underline{\tau}} = -\mu\left[\underline{\nabla}\,\underline{v} + (\underline{\nabla}\,\underline{v})^T\right]$$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\tau}} = -\mu\,\underline{\nabla}\cdot\left[\underline{\nabla}\,\underline{v} + (\underline{\nabla}\,\underline{v})^T\right] = -\mu\left(\underline{\delta}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\cdot\left[\underline{\delta}_j\underline{\delta}_k\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \underline{\delta}_j\underline{\delta}_k\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right]$$

$$= -\mu\,\delta_{ij}\,\underline{\delta}_k\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right] = -\mu\,\underline{\delta}_k\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right]$$

$$= -\mu\,\underline{\delta}_k\left(\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right) = -\mu\left(\nabla^2\underline{v} + \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{v})\right)$$

$$\xrightarrow[\underline{\nabla}\cdot\underline{v}=0]{\rho = cte} -\mu\nabla^2\underline{v}$$

$$\xrightarrow{\text{جاگذاری در معادله حرکت}} \rho\frac{D\underline{v}}{Dt} = -\underline{\nabla} p + \mu\nabla^2\underline{v} + \rho\underline{g} \quad \text{(Navier-Stokes eq.)}$$

$\boxed{3-3-2}$ NS با ترم‌های شتاب صفر

$$\rho\frac{D\underline{v}}{Dt} = 0 \Rightarrow 0 = -\underline{\nabla} p + \mu\nabla^2\underline{v} + \rho\underline{g}$$

(The stokes flow eq. or
The creeping 〃 〃.)

$\boxed{3-3-3}$ صرف‌نظر از نیروهای ویسکوز

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\tau}} = 0 \Rightarrow \rho\frac{D\underline{v}}{Dt} = -\underline{\nabla} p + \rho\underline{g}$$

(The Euler eq.)

که برای سیالات غیرویسکوز یا با ویسکوزیته‌ی خیلی کم کاربرد داره

④ حل مسائل با استفاده از معادلات پیوستگی و حرکت

- بازنویسی معادله حرکت ← معادله‌ی Navier - Stokes :

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\underline{\nabla} p + \mu \nabla^2 \underline{v} + \rho \underline{g}$$

← حالت بازنویسی شده:

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\nabla \mathcal{P} + \mu \nabla^2 \underline{v}$$

← که

$$\mathcal{P} = p - \rho \underline{g}\cdot\underline{x}$$

modified pressure

← اثبات ← باید اثبات کنیم که:

$$\underline{\nabla}\mathcal{P} = \underline{\nabla} p - \rho \underline{g}$$

$$\underline{\nabla}(\rho \underline{g}\cdot\underline{x}) = (\underline{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i})[\rho (g_j \underline{\delta}_j)\cdot(x_k \underline{\delta}_k)]$$

$$= (\underline{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i})[\rho g_j x_k \delta_{jk}]$$

$$= (\underline{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i})(\rho g_j x_j) = \rho g_j \underline{\delta}_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i}$$

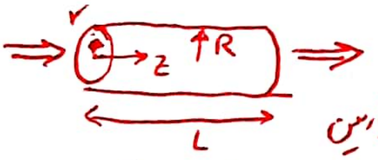
$$= \rho g_j \underline{\delta}_i \delta_{ij} = \rho g_i \underline{\delta}_i = \rho \underline{g}$$

← بنابراین:

$$\underline{\nabla}\mathcal{P} = \underline{\nabla}(p - \rho \underline{g}\cdot\underline{x}) = \underline{\nabla} p - \underline{\nabla}(\rho \underline{g}\cdot\underline{x})$$

$$= \underline{\nabla} p - \rho \underline{g}$$

- مثال 1 ← یه سیال نیوتنی از لوله‌ای مثل شکل جلو عبور می‌کند:
← از اثرات ابتدایی و انتهایی صرف نظر کنید و توزیع سرعت داخل لوله رو بدست بیارین



- حل مثال 1 ← با توجه به هندسه مسئله، مختصات استوانه‌ای رو انتخاب می‌کنیم. توی:

$$\underline{v} = v_r \underline{\delta}_r + v_\theta \underline{\delta}_\theta + v_z \underline{\delta}_z$$

← معادله‌ی حرکت توی این مختصات:

r-component:
$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\cdot\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r}\right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r v_r)\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right] + \rho g_r$$

θ-component:
$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\cdot\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r}\right) = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] + \rho g_\theta$$

z-component:
$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\cdot\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \cdot\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] + \rho g_z$$

← با توجه به توسعه یافته بودن جریان

$$v_r = 0$$

$$v_\theta = 0$$

$$v_z = v_z(r)$$

با جایگزینی در معادله حرکت :

$$\begin{cases} \rho g_r - \dfrac{\partial P}{\partial r} = 0 \\ \rho g_\theta - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \\ 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial z} + \mu \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \rho g_z \end{cases}$$

با استفاده از فشار تغییر یافته :

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial r} = 0 & (*1) \\ -\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} = 0 & (*2) \\ -\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} + \mu\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial V_z}{\partial r}\right) = 0 & (*3) \end{cases}$$

با توجه به اینکه در دو معادله (*1) و (*2) ، $\mathcal{P}$ تابعی از r و θ ندارد :

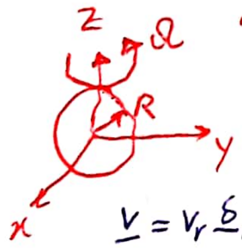
$$\frac{\mu}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right) = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} = C_0$$

که این امکان پذیر نیست مگر اینکه با یه ثابت برابر باشن

پس باید دو معادله‌ی جلو حل بشن:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} = C_0 \\ \dfrac{\mu}{r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial V_z}{\partial r}\right) = C_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathcal{P} = C_0 z + C_1 \\ V_z = \dfrac{C_0}{4\mu} r^2 + C_2 \ln r + C_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B.C.\#1: & @ \; z=0: & \mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \\ B.C.\#2: & @ \; z=L: & \mathcal{P} = \mathcal{P}_L \\ B.C.\#3: & @ \; r=R: & v_z = 0 \\ B.C.\#4: & @ \; r=0: & v_z = \text{finite} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathcal{P} = \mathcal{P}_0 - (\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)\cdot\dfrac{z}{L} \\ V_z = \dfrac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{4\mu L}\left[1 - \left(\dfrac{r}{R}\right)^2\right] \end{cases}$$



مثال 2 - یه جامد کروی با شعاع R به آهستگی حول یه محورش با سرعت زاویه‌ای Ω توی یه سیال می‌چرخه
فرض کنید که سیال اونقدر به آهستگی حرکت می‌کنه که شرایط جریان خزشی (Creeping flow) برقرار باشد . توزیع سرعت سیال اطراف رو بدست بیارید .

حل مثال 2 - برای حل این مسئله از مختصات کروی استفاده می‌کنیم :

$$\underline{V} = v_r \underline{\delta}_r + v_\theta \underline{\delta}_\theta + v_\phi \underline{\delta}_\phi$$

با توجه به هندسه مسئله :

$$v_r = V_\theta = 0 \quad , \; V_\phi = V_\phi(r,\theta), \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}(r,\theta)$$

با جایگذاری در معادله حرکت جریان خزشی :

$$r\text{-component:} \quad 0 = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r}$$

$$\theta\text{-component:} \quad 0 = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta}$$

$$\phi\text{-component:} \quad 0 = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{\partial V_\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}(V_\phi \sin\theta)\right) \quad (*)$$

$$\begin{cases} B.C.\#1: & @ \; r=R: & V_\phi = R\Omega\sin\theta \\ B.C.\#2: & @ \; r\to\infty: & V_\phi \to 0 \\ B.C.\#3: & @ \; r\to\infty: & \mathcal{P} \to \mathcal{P}_0 \end{cases}$$

برای حل معادله فرض می‌کنیم که جواب به صورت زیر است :

$$V_\phi = f(r)\cdot\sin\theta$$

(این یه حدسه که حداقل با شرایط مرزی هم خونی داره)

ـــ اگه این معادله سرعت رو توی معادله (*) جاگذاری کنیم می‌رسیم به:

$$\Rightarrow \frac{d}{dr}(r^2 f') - 2f = 0 \Rightarrow f = C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \Rightarrow V_\phi = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r^2}\right)\sin\theta$$

$$B.C.s \Rightarrow C_1 = 0 \,,\; C_2 = \Omega R^2 \Rightarrow V_\phi = \Omega R\left(\frac{R}{r}\right)^2 \sin\theta$$

(5) آنالیز ابعادی معادلات پیوستگی و حرکت

ـ در بسیاری از مسائل مکانیک سیالات
- امکان حل تحلیلی وجود نداره
- سر همین اگه قرار باشه که الگوهای جریان حل به سمت بیان، اگه رو نمونه های آزمایشگاهی
- ارزش بهینه‌سازی و آزمایشات رو روی اونا انجام میدن
- بعد نتایج حاصل رو واسه‌ی نمونه‌ی واقعی scale-up یا scale-down می‌کنیم
- واسه‌ی این کار، دو تا شرط باید رعایت بشن:
  (1) تشابه هندسی (Geometric similarity): همه نسبت های ابعاد در نمونه واقعی و آزمایشگاهی باید یکی باشن
  (2) تشابه دینامیکی (Dynamic similarity): اعداد بدون بعد در معادلات حاکم و شرایط مرزی " "
- تشابه دینامیکی می‌تونه از معادلات حاکم و شرایط مرزی بدون بعد شده، به راحتی درک بشه

ـ بی بعد کردن معادلات پیوستگی و حرکت
- واسه‌ی اینکار، اینا رو واسه‌ی یه سیال با ρ و μ ثابت درنظر می‌گیریم:

$$\left|\begin{array}{l} \underline{\nabla}\cdot\underline{v} = 0 \\ \rho\dfrac{D\underline{v}}{Dt} = -\underline{\nabla}p + \mu\nabla^2\underline{v} \end{array}\right.$$

- برای بدون بعد سازی، نیاز به مقیاس های طولی، زمانی، سرعت و فشار مشخصه داریم:

l_c (طول مشخصه) / v_c (سرعت مشخصه) / P_c (فشار مشخصه) / $t_c = \frac{l_c}{v_c}$ (زمان مشخصه)

- با استفاده از این مقیاس ها:

$$\underset{\text{بدون بعد}}{\bar{x}} = \underset{\text{بعددار}}{\frac{x}{l_c}} \,,\; \bar{y} = \frac{y}{l_c} \,,\; \bar{z} = \frac{z}{l_c} \,,\; \bar{t} = \frac{t}{t_c} \,,\; \bar{\underline{v}} = \frac{\underline{v}}{v_c} \,,\; \bar{p} = \frac{p}{P_c}$$

- بی بعد کردن گرادیان:

$$\underline{\nabla} = \underline{\delta}_x\frac{\partial}{\partial x} + \underline{\delta}_y\frac{\partial}{\partial y} + \underline{\delta}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$= \underline{\delta}_x\frac{\partial}{\partial(\bar{x}l_c)} + \underline{\delta}_y\frac{\partial}{\partial(\bar{y}l_c)} + \underline{\delta}_z\frac{\partial}{\partial(\bar{z}l_c)}$$

$$= \frac{1}{l_c}\left(\underline{\delta}_x\frac{\partial}{\partial\bar{x}} + \underline{\delta}_y\frac{\partial}{\partial\bar{y}} + \underline{\delta}_z\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right) \Rightarrow \underline{\nabla} = \frac{1}{l_c}\bar{\underline{\nabla}}$$

- بی بعد کردن مشتق مادی:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial(\bar{t}t_c)} + (\bar{\underline{v}}\cdot v_c)\cdot\left(\frac{1}{l_c}\bar{\underline{\nabla}}\right)$$

$$= \frac{1}{t_c}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar{t}} + \frac{v_c}{l_c}\,\bar{\underline{v}}\cdot\bar{\underline{\nabla}} = \frac{v_c}{l_c}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{t}} + \bar{\underline{v}}\cdot\bar{\underline{\nabla}}\right) \Rightarrow \frac{D}{Dt} = \frac{v_c}{l_c}\cdot\frac{D}{D\bar{t}}$$

- بی بعد کردن لاپلاسین:

$$\bar{\nabla}^2 = l_c^2\cdot\underline{\nabla}^2$$

- با استفاده از روابط فوق ← معادلات بی بعد میشن :

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \cdot \bar{V} = 0 \\ \dfrac{D\bar{V}}{D\bar{t}} = -\dfrac{P_c}{\rho V_c^2} \bar{\nabla} \bar{p} + \dfrac{\mu}{\rho V_c} \bar{\nabla}^2 \bar{V} \end{cases}$$

← واسه ی فشار مشخصه دوتا انتخاب داریم

$$P_c = \rho V_c^2$$

$$P_c = \frac{\mu V_c}{l_c}$$

← در هر حال:

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \cdot \bar{V} = 0 \\ \dfrac{D\bar{V}}{D\bar{t}} = -\bar{\nabla} \bar{p} + \dfrac{1}{Re} \bar{\nabla}^2 \bar{V} \\ \dfrac{D\bar{V}}{D\bar{t}} = -\dfrac{1}{Re} \bar{\nabla} \bar{p} + \dfrac{1}{Re} \bar{\nabla}^2 \bar{V} \end{cases} \quad , \; Re = \frac{\rho_c V_c l_c}{\mu_c}$$