- در این فصل به بررسی مسائلی می پردازیم که حل آنها نیاز به حل معادلات دیفرانسیلی جزئی (PDE) دارد.
- مثل: جریان‌های حالت ناپایا - جریان سیال در چند جهت - جریان سیالات غیرویسکوز (inviscid) - جریان سیالات در لایه مرزی

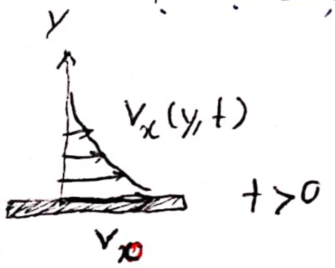
- contents
  - Time-Dependent Flow of Newtonian Fluids
  - Solving Flow Problems Using a Stream Function
  - Flow of Inviscid by use of the velocity Potential
  - Flow near Solid Surfaces by boundary layer theory

① جریان وابسته به زمان سیالات نیوتنی

- مسائلی که بیشتر مورد بررسی قرار گرفتند، برای حالت پایا بودند. اما در خیلی از مسائل مکانیک سیالات، سرعت سیال به هر دوی مکان و زمان بستگی دارد. قصد داریم مسائلی را بررسی کنیم که وابسته به زمان می باشد و با روش های متداول حل چنین مسائلی آشنا شویم.

- روش های متداول
  - روش ترکیب متغیرها ← The method of Combination of Variables (Similarity Solutions)
    - برای هندسه های نیمه بی نهایت (semi-infinite) مناسب
  - روش جداسازی متغیرها ← The method of Separation of Variables
  - روش پاسخ سینوسی ← The method of Sinusoidal Response
    - برای سیستم های با نیروهای محرک خارجی متناوب مناسب

- مثال ۱
  - یک سیال با ρ و μ ثابت مطابق شکل روبرو در تماس با یک دیواره است.
  - دیواره و سیال در ابتدا در حالت سکون می باشند، اما در زمان $t=0$،
  - دیواره در راستای $+x$ با سرعت V_0 به حرکت در می آید.
  - سرعت سیال را برحسب y و t محاسبه نمایید
  - هیچ گرادیان فشار یا نیروی گرانشی در راستای x وجود ندارد، و فرض کنید که جریان آرام است.



- حل مثال
  - برای این مسئله: $V_y = V_z = 0 \;,\; V_x = V_x(y,t)$
  - معادله پیوستگی در مختصات کارتزین:

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

  - که با توجه به فرم سرعت ها، معادله ی پیوستگی برقرار است
  - حال معادله حرکت را مدنظر قرار می دهیم و راستای x آن را با در نظر گرفتن فرم اجزای سرعت مسئله بدست می آوریم:

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{v} \Longrightarrow \frac{\partial V_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \quad ① \qquad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

$$\begin{cases} \text{I.C.:} & @\ t \le 0, \ \text{all } y & : V_x = 0 \\ \text{B.C.\#1:} & @\ y=0, \ t>0 & : V_x = V_0 \\ \text{B.C.\#2:} & @\ y=\infty, \ t>0 & : V_x = 0 \end{cases}$$

  - در ادامه یک سرعت بدون بعد معرفی می کنیم: $\phi = \dfrac{V_x}{V_0}$

حال سرعت بدون بعد را در معادله ① و شرایط مرزی اعمال می کنیم:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \qquad ②$$

$$\begin{cases} I.C.: & \phi(y, t=0) = 0 \\ B.C.\#1: & \phi(y=0, t) = 1 \\ B.C.\#2: & \phi(y=\infty, t) = 0 \end{cases}$$

برای حل معادله ② از روش ترکیب متغیرها استفاده می کنیم:

$$\phi = \phi(y,t)$$

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{4\nu t}} \quad \Big| \implies \phi = \phi(\eta)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{d\phi}{d\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\eta}{t} \cdot \frac{d\phi}{d\eta}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{d\phi}{d\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{4\nu t}} \cdot \frac{d\phi}{d\eta} \quad , \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{1}{4\nu t} \cdot \frac{d^2\phi}{d\eta^2}$$

با استفاده از عبارات فوق، معادله ② ساده خواهد شد:

$$\frac{d^2\phi}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\phi}{d\eta} = 0 \qquad ③$$

$$\begin{cases} B.C.\#1: & @\eta=0 : \phi=1 \\ B.C.\#2: & @\eta=\infty : \phi=0 \end{cases}$$

حال قصد داریم معادله ③ را حل کنیم، با دو بار انتگرال گرفتن:

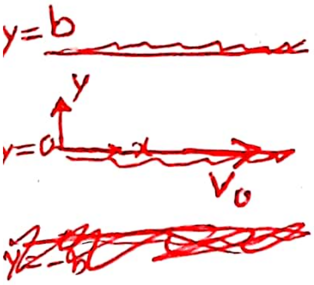
$$\phi = A\int_0^{\eta} e^{-s^2} ds + B \longrightarrow \phi = A\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \mathrm{erf}(\eta) + B$$

$$B.C.\#1 \implies B = 1$$

$$B.C.\#2 \implies A = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \qquad \mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2} ds$$

$$\implies \phi(\eta) = 1 - \mathrm{erf}(\eta)$$

$$\implies \frac{V_x(y,t)}{V_0} = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{4\nu t}}\right) = \mathrm{erfc}\left(\frac{y}{\sqrt{4\nu t}}\right)$$



مثال 2 - یک سیال با جرم و μ ثابت، بین دو صفحه ی موازی قرار داره. فاصله ی بین دو صفحه b.

در ابتدا سیال و صفحات ساکن ولی در زمان $t=0$، صفحه ی پایینی در جهت $+x$ با سرعت ثابت V_0 به حرکت درمیاد

سرعت سیال را بر حسب y و t محاسبه کنید.

توجه داشته باشید که صفحه ی فوقانی ثابت است و هیچ گرادیان فشار یا نیروی گرانشی در راستای x وجود نداره

Scanned with CamScanner

حال ثوابت انتگرال گیری را حساب می‌کنیم :

$$\text{B.C. \#1:}\quad \Phi(\eta=0,\tau>0)=0$$

$$\Rightarrow f(0)\cdot g(\tau)=0 \Rightarrow (B\sin 0 + C\cos 0)\cdot g(\tau)=0 \Rightarrow \underline{C=0}$$

$$\text{B.C. \#2:}\quad \Phi(\eta=1,\tau>0)=0 \Rightarrow (B\sin c)A\exp(-c^2\eta)=0$$

$$\Longrightarrow AB\cdot \sin c\cdot\exp(-c^2\eta)=0 \Rightarrow \sin c=0 \Rightarrow c=0,\pm\pi,\cdots =n\pi,\ n=0,\pm1,\cdots$$

برای هر c ، تابع های f و g مربوطه و پیرو آنها، Φ مربوطه وجود خواهد داشت. اگر $C=n\pi$ را نیز قرار دهیم

$$\Phi_n=A_nB_n\sin(n\pi\eta)\cdot\exp(-n^2\pi^2\tau)$$

اگه معادله‌ی فوق رو توی معادله ② جایگزین کنیم، خواهیم دید که در آن معادله صدق می‌کند. البته که ترکیب‌های خطی‌شان هم

$$\Phi=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}A_nB_n\sin(n\pi\eta)\cdot e^{-n^2\pi^2\tau}$$

توی معادله صدق می‌کنند،

به عبارت دیگر، رابطه‌ی فوق، جواب کلی معادله‌ی ② است که میایم و بازنویسی‌اش می‌کنیم :

$$\Phi=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}D_n'\sin(n\pi\eta)e^{-n^2\pi^2\tau}=\sum_{n=-\infty}^{-1}D_n'\sin(n\pi\eta)e^{-n^2\pi^2\tau}+D_0'\sin(0)\cdot e^0+\sum_{n=1}^{\infty}D_n'\sin(n\pi\eta)\cdot e^{-n^2\pi^2\tau}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-D_{-n}'+D_n')\sin(n\pi\eta)e^{-n^2\pi^2\tau} \Rightarrow \Phi=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin(n\pi\eta)\cdot e^{-n^2\pi^2\tau}$$

حال شرایط اولیه را پیاده سازی می‌کنیم :

$$\Phi(\eta,\tau=0)=\phi_{ss}(\eta) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin(n\pi\eta)=1-\eta$$

$$\xrightarrow[\int_{\eta=0}^{\eta=1}]{\times\sin(m\pi\eta)} \sum_{n=1}^{\infty}D_n\int_{\eta=0}^{\eta=1}\sin(n\pi\eta)\cdot\sin(m\pi\eta)d\eta=\int_{\eta=0}^{\eta=1}(1-\eta)\sin(m\pi\eta)dy$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l}\int_{\eta=0}^{\eta=1}\sin(n\pi\eta)\cdot\sin(m\pi\eta)d\eta=\begin{vmatrix}0 & \text{if } n\neq m\\ \frac{1}{2} & \text{if } n=m\end{vmatrix}\\ \\ \int_{\eta=0}^{1}(1-\eta)\sin(m\pi\eta)d\eta=\frac{1}{m\pi}\end{array}\right| \Rightarrow \underline{D_n=\frac{2}{n\pi}}$$

سرانجام :

$$\Rightarrow \phi(\eta,\tau)=(1-\eta)-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}\right)\cdot\sin(n\pi\eta)\cdot e^{-n^2\pi^2\tau}$$

$$\Rightarrow \frac{V_x(y,t)}{V_0}=\left(1-\frac{y}{b}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}\right)\cdot\sin\left(n\pi\frac{y}{b}\right)\cdot e^{-n^2\pi^2\frac{\nu t}{b^2}}$$

2

- حل مثال

این مثال مثل مثال قبله با این تفاوت که سیال بین دو سطح bound شده

برای حل از اثرات ابتدایی و انتهایی صرف نظر می‌کنیم و:

$$V_y = V_z = 0 \quad , \quad V_x = V_x(y,t)$$

معادله حرکت را در سیستم مختصات کارتزین استفاده می‌کنیم که بعد از ساده سازی:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}$$

$$\begin{cases} \text{I.C.:} & @\ t \leq 0\ ,\ \text{all } y \ :\ V_x = 0 \\ \text{B.C.\#1:} & @\ y=0\ ,\ t>0 \ :\ V_x = V_0 \\ \text{B.C.\#2:} & @\ y=b\ ,\ t>0 \ :\ V_x = 0 \end{cases}$$

معادله ی فوق را با استفاده از متغیرهای زیر، بدون بعد می‌کنیم:

$$\phi = \frac{V_x}{V_0} \ ,\ \eta = \frac{y}{b} \ ,\ \tau = \frac{\nu t}{b^2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \text{I.C.:} & \phi(\eta, \tau=0) = 0 \\ \text{B.C.\#1:} & \phi(\eta=0, \tau>0) = 1 \\ \text{B.C.\#2:} & \phi(\eta=1, \tau>0) = 0 \end{cases}$$

پیش از اینکه مسئله فوق را حل کنیم، ابتدا جواب را در حالت پایا بدست خواهیم آورد:

$$\frac{\partial^2 \phi_{ss}}{\partial \eta^2} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial \phi_{ss}}{\partial \eta} = C_1 \Rightarrow \phi_{ss} = C_1 \eta + C_2$$

$$\begin{cases} \text{B.C.\#1:} & @\ \eta=0 \ :\ \phi_{ss} = 1 \\ \text{B.C.\#2:} & @\ \eta=1 \ :\ \phi_{ss} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \phi_{ss} = 1 - \eta$$

حال برمی‌گردیم به حل معادله حالت گذرا (معادله (1)). برای حل آن، دوباره یک تغییر متغیر می‌دهیم:

$$\Phi(\eta, \tau) = \phi_{ss}(\eta) - \phi(\eta, \tau)$$

با جایگذاری Φ در معادله فوق در معادله (1) شرایط مرزی:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \text{I.C.:} & \Phi(\eta, \tau=0) = \phi_{ss}(\eta) \\ \text{B.C.\#1:} & \Phi(\eta=0, \tau>0) = 0 \\ \text{B.C.\#2:} & \Phi(\eta=1, \tau>0) = 0 \end{cases}$$

برای حل معادله (2) از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌کنیم:

$$\Phi(\eta, \tau) = f(\eta) \cdot g(\tau)$$

$$\xrightarrow{(2)} \frac{1}{g}\frac{dg}{d\tau} = \frac{1}{f}\frac{d^2 f}{d\eta^2} = -c^2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dg}{d\tau} = -c^2 g \\ \dfrac{d^2 f}{d\eta^2} + c^2 f = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} g = A e^{-c^2 \tau} \\ f = B \sin c\eta + C \cos c\eta \end{cases}$$

③

- مثال 3 ← یه سیال با ρ و μ ثابت، در تماس با یه سطح جامده. سیال و سطح جامد در ابتدا ساکن ولی توی زمانِ $t=0$، سطح جامد شروع به حرکت نوسانی با فرکانس زاویه‌ای ω در راستای x می‌کنه ← سرعتِ سیال رو توی $t\to\infty$ (وقتی که پدیده‌های گذرای اولیه محو شدن) به دست بیارین

$V_{\text{سطح}} = V_0 \cos(\omega t)$

- حل مثال ← معادله حاکم و شرایط مرزی عبارتند از:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad ①$$

$$\begin{cases} I.C.: & @\ t\leq 0\ ,\ \text{all } y: \quad v_x = 0 \\ B.C.\#1: & @\ y=0\ ,\ t>0: \quad v_x = v_{\text{سطح}} = V_0\cos(\omega t) \\ B.C.\#2: & @\ y=\infty\ ,\ t>0: \quad v_x = 0 \end{cases}$$

← با توجه به اینکه قصد داریم سرعتِ سیال رو توی $t\to\infty$ به دست بیاریم، توی این گستره‌ی زمانی، اثراتِ اولیه محو شده‌ان و اثرِ I.C. از بین رفته؛ پس این شرط واسه‌ی حلِ مسئله مورد نیاز نخواهد بود.

← می‌شه سرعتِ سطح جامد رو اینطوری بازنویسی کرد:

$$V_{\text{سطح}} = Re\{V_0 \cdot e^{i\omega t}\}$$

↳ "The Real Part of"

که اینو روی $\underline{B.C.\#1}$ هم اعمال می‌کنیم

← می‌شه مسئله رو با این شرط حل کرد و در نهایت از جوابِ نهایی، Real گرفت

← واسه‌ی حل، سرعتِ سیال رو اینطوری فرض می‌کنیم:

$$v_x(y,t) = v'(y) \cdot e^{i\omega t}$$

← اینو توی رابطه ① می‌ذاریم:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[v'(y)\cdot e^{i\omega t}\right] = i\omega v'(y)\cdot e^{i\omega t}$$

$$\frac{d^2 v_x}{dy^2} = \frac{d^2 v'(y)}{dy^2}\cdot e^{i\omega t} \quad \overset{①}{\Longrightarrow} \quad \frac{d^2 v'(y)}{dy^2} - \frac{i\omega}{\nu} v'(y) = 0$$

$$\Rightarrow v'(y) = c_1 \exp\left(y\sqrt{\frac{i\omega}{\nu}}\right) + c_2 \exp\left(-y\sqrt{\frac{i\omega}{\nu}}\right)$$

$$\sqrt{i} = \pm\frac{1+i}{2} \quad \Longrightarrow \quad v'(y) = c_1 \cdot \exp\left((1+i)y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right) + c_2 \exp\left(-(1+i)y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right)$$

← شرایط مرزی رو اعمال می‌کنیم:

$$\begin{matrix} B.C.\#1: & v'_y(y=0) = V_0 \\ B.C.\#2: & v'_y(y=\infty) = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_2 = V_0 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v'(y) = V_0 \cdot \exp\left(-(1+i)y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right)$$

← سرانجام:

$$v_x(y,t) = Re\{v'(y) e^{i\omega t}\}$$

$$= Re\left\{V_0 \cdot \exp\left(-(1+i)y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right) \cdot \exp(i\omega t)\right\}$$

$$\Rightarrow v_x(y,t) = V_0 \cdot \exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right) \cdot \cos\left(\omega t - y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right)$$

② حل مسائل مکانیک سیالات به کمک تابع جریان

در مسائلی که تاکنون مورد بررسی قرار دادیم، سرعت سیال تنها یه جزء غیرصفر داشت. درصورتیکه در بسیاری از مسائل مکانیک سیالات، سرعت سیال، دو یا سه جزء غیرصفر داره. به عبارت دیگه جریان سیال دو یا سه بعدیه. حل چنین مسائلی در مقایسه با مسائل پیشین پیچیده‌تره. یه روش واسه‌ی این کار، حذف فشار از معادله‌ی NS که درنتیجه‌ش از مجهولات کم می‌شه.

2-1 معادله تغییرات Vorticity

- اثبات معادله‌ش:

معادله NS :

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\underline{\nabla} p + \mu \nabla^2 \underline{v} \quad ①$$

اولی که اینا رو می‌دونیم:

$$\frac{D\underline{v}}{Dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\underline{v} \quad ②$$

$$\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\underline{v} = \frac{1}{2}\underline{\nabla}(\underline{v}\cdot\underline{v}) - \underline{v}\times[\underline{\nabla}\times\underline{v}] \quad ③$$

حالا دو تا جاگذاری: $3 \to 2$

$$\frac{D\underline{v}}{Dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\underline{\nabla}(\underline{v}\cdot\underline{v}) - \underline{v}\times[\underline{\nabla}\times\underline{v}] \quad ④$$

$4 \to 1$

$$\rho\left\{\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\underline{\nabla}(\underline{v}\cdot\underline{v}) - \underline{v}\times[\underline{\nabla}\times\underline{v}]\right\} = -\underline{\nabla} p + \mu\nabla^2\underline{v} \quad ⑤$$

$\underline{\nabla}\times ⑤$:

$$\rho\left\{\frac{\partial\, \underline{\nabla}\times\underline{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\underline{\nabla}\times[\underline{\nabla}(\underline{v}\cdot\underline{v})] - \underline{\nabla}\times(\underline{v}\times[\underline{\nabla}\times\underline{v}])\right\} = -\underline{\nabla}\times\underline{\nabla} p + \underline{\nabla}\times[\mu\nabla^2\underline{v}]$$

$$\Rightarrow \rho\left\{\frac{\partial(\underline{\nabla}\times\underline{v})}{\partial t} + \underline{\frac{1}{2}\underline{\nabla}\times[\underline{\nabla}(\underline{v}\cdot\underline{v})]} - \underline{\nabla}\times(\underline{v}\times[\underline{\nabla}\times\underline{v}])\right\} = \underline{-\underline{\nabla}\times\underline{\nabla} p} + \mu\nabla^2(\underline{\nabla}\times\underline{v})$$

می‌دونیم که $\underline{\nabla}\times\underline{\nabla} S = 0$; اسکالر

$$\Rightarrow \rho\left\{\frac{\partial(\underline{\nabla}\times\underline{v})}{\partial t} - \underline{\nabla}\times(\underline{v}\times[\underline{\nabla}\times\underline{v}])\right\} = \mu\nabla^2[\underline{\nabla}\times\underline{v}]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}[\underline{\nabla}\times\underline{v}] - \underline{\nabla}\times(\underline{v}\times[\underline{\nabla}\times\underline{v}]) = \nu\nabla^2[\underline{\nabla}\times\underline{v}]$$

« معادله تغییر ورتیسیتی – Vorticity $(\underline{\nabla}\times\underline{v})$ »

- این معادله با درنظر گرفتن شرایط مرزی و اولیه حل بشه، سرعت سیال بدست میاد.
- که بعدش می‌شه فشار رو از معادله‌ی ① بدست آورد.

2-2 تابع جریان یه جریان دو بعدی در مختصات کارتزین

- واسه‌ی یه جریان دو بعدی (2D)

که توش: $\underline{u}=(u,v,0)$ و u و v مستقل از z ان

عبارتِ جلو یه دیفر کامله: $u\,dy - v\,dx$ (1)

البته اگه:

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

- قضیه‌ی معادله‌ی کامل

معادله‌ی جلو کامله: $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ (2)

اگه که $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

که اینطوریه، یه تابعِ $f(x,y)$ ای وجود خواهد داشت که:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = M \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = N \end{cases}$$

- حال از این قضیه برای مسئله‌ی خودمون استفاده می‌کنیم

از قیاسِ معادله‌ی (1) و (2) داریم:

$$\begin{cases} M(x,y) = -v \\ N(x,y) = u \end{cases}$$

با استفاده از معادله‌ی پیوستگی ($\underline{\nabla}\cdot\underline{V}=0$):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \implies -\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \implies \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \ \checkmark$$

پس معادله‌ی (1) یه معادله‌ی دیفر کامله و تابع ψ ای وجود داره که:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = -v = -V_y \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = u = V_x \\ V_z = 0 \end{cases}$$

- می‌خوایم معادله‌ی vorticity رو برحسب ψ بازنویسی کنیم

خودِ معادله‌ی vorticity:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\underline{\nabla}\times\underline{V}] - \underline{\nabla}\times[\underline{V}\times[\underline{\nabla}\times\underline{V}]] = \nu\nabla^2[\underline{\nabla}\times\underline{V}]$$

ابتدا $\underline{\nabla}\times\underline{V}$ را حساب می‌کنیم:

$$\underline{\nabla}\times\underline{V} = \varepsilon_{ijk}\underline{\delta}_k\frac{\partial V_j}{\partial x_i}$$

$$= \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\underline{\delta}_x + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\underline{\delta}_y + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\underline{\delta}_z$$

$$= -\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)\underline{\delta}_z = -(\nabla^2\psi)\underline{\delta}_z \quad , \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

در نتیجه

$$\frac{\partial}{\partial t}[\underline{\nabla}\times\underline{V}] = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi)\underline{\delta}_z$$

$$\nabla^2[\underline{\nabla}\times\underline{V}] = -(\nabla^2\nabla^2\psi)\underline{\delta}_z = -(\nabla^4\psi)\underline{\delta}_z$$

$$\underline{V}\times[\underline{\nabla}\times\underline{V}] = \underline{V}\times[-(\nabla^2\psi)\underline{\delta}_z]$$

$$= -(V_x\underline{\delta}_x\times\underline{\delta}_z + V_y\underline{\delta}_y\times\underline{\delta}_z + V_z\underline{\delta}_z\times\underline{\delta}_z)(\nabla^2\psi)$$

$$= -(-V_x\underline{\delta}_y + V_y\underline{\delta}_x)(\nabla^2\psi)$$

$$= -\left(-\frac{\partial\psi}{\partial y}\underline{\delta}_y + \frac{\partial\psi}{\partial x}\underline{\delta}_x\right)\nabla^2\psi$$

$$= -\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}(\nabla^2\psi)\underline{\delta}_y + \frac{\partial\psi}{\partial x}(\nabla^2\psi)\underline{\delta}_x\right)$$

همینطور:

$$\underline{\nabla}\times[\underline{V}\times[\underline{\nabla}\times\underline{V}]]$$
$$=-\underline{\nabla}\times\left\{\frac{\partial\psi}{\partial y}(\nabla^2\psi)\underline{\delta}_y+\frac{\partial\psi}{\partial x}(\nabla^2\psi)\underline{\delta}_x\right\}$$
$$=-\underline{\nabla}\times\left\{\frac{\partial\psi}{\partial y}(\nabla^2\psi)\underline{\delta}_y\right\}-\underline{\nabla}\times\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x}(\nabla^2\psi)\underline{\delta}_x\right\}$$
$$=-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial y}(\nabla^2\psi)\right\}\underline{\delta}_z+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x}(\nabla^2\psi)\right\}\underline{\delta}_z$$
$$=-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial y}(\nabla^2\psi)\right\}-\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x}(\nabla^2\psi)\right\}\right]\underline{\delta}_z$$
$$=-\left[\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\psi)-\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2\psi)\right]\underline{\delta}_z$$

جایگذاری اینا توی معادله‌ی vorticity میده:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi)+\left[\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\psi)-\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2\psi)\right]=-\nu\nabla^4\psi$$

$$\Longrightarrow\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi)+\left[-\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\psi)+\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2\psi)\right]=\nu\nabla^4\psi$$

$$\left|\begin{array}{l}\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\\[2ex]\nabla^4=\nabla^2\nabla^2=\dfrac{\partial^4}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4}{\partial y^4}\end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi)+\frac{\partial(\psi,\nabla^2\psi)}{\partial(x,y)}=\nu\nabla^4\psi\quad,\quad\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y}\end{vmatrix}$$

2-3 تابع جریان یه جریان دو بعدی توی مختصات کروی

$$\underline{V}=V_r\underline{\delta}_r+V_\theta\underline{\delta}_\theta+V_\phi\underline{\delta}_\phi$$

واسه‌ی یه جریان دو بعدی (2D)

با شرایط: $V_\phi=0,\ V_r=V_r(r,\theta),\ V_\theta=V_\theta(r,\theta)$

داریم:

$$\psi=\psi(r,\theta)$$
$$V_r=\frac{-1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$
$$V_\theta=\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

- می‌خوایم معادله‌ی vorticity رو توی این مختصات برحسب ψ بازنویسی کنیم

خود معادله:

$$⑤\quad \frac{\partial}{\partial t}[\underline{\nabla}\times\underline{V}] - \underline{\nabla}[\underline{V}\times[\underline{\nabla}\times\underline{V}]] = \nu\nabla^2[\underline{\nabla}\times\underline{V}]$$

تعریف کرل توی این مختصات:

$$\underline{\nabla} = \underline{\delta}_r\frac{\partial}{\partial r} + \underline{\delta}_\theta\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta} + \underline{\delta}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\phi}$$

ابتدا $\underline{\nabla}\times\underline{V}$ ،

$$\underline{\nabla}\times\underline{V} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot \cancel{V_\phi}) - \frac{\partial V_\theta}{\partial\phi}\right]\underline{\delta}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\cancel{r}\sin\theta}\cdot\frac{\partial V_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rV_\phi)\right]\underline{\delta}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right]\underline{\delta}_\phi$$

شرایط جریان

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right]\underline{\delta}_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}(E^2\psi)\underline{\delta}_\phi$$

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

در ادامه

$$\frac{\partial}{\partial t}[\underline{\nabla}\times\underline{V}] = \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(E^2\psi)\underline{\delta}_\phi$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$$\nabla^2[\underline{\nabla}\times\underline{V}] = \left\{\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial^2E^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial E^2\psi}{\partial\theta}\right)\right\}\underline{\delta}_\phi$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial^2E^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial E^2\psi}{\partial\theta}\right)\right\}\underline{\delta}_\phi$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}(E^2E^2\psi)\underline{\delta}_\phi$$

$$\underline{V}\times[\underline{\nabla}\times\underline{V}] = (V_r\underline{\delta}_r + V_\theta\underline{\delta}_\theta + V_\phi\underline{\delta}_\phi)\times\left(\frac{1}{r\sin\theta}(E^2\psi)\underline{\delta}_\phi\right)$$

$$= \frac{V_r}{r\sin\theta}(E^2\psi)\,\underline{\delta}_r\times\underline{\delta}_\phi + \frac{V_\theta}{r\sin\theta}(E^2\psi)\,\underline{\delta}_\theta\times\underline{\delta}_\phi$$

$$= [-V_r\underline{\delta}_\theta + V_\theta\underline{\delta}_r]\frac{1}{r\sin\theta}(E^2\psi)$$

$$= \left[\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\underline{\delta}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\underline{\delta}_r\right]\frac{1}{r\sin\theta}(E^2\psi)$$

$$= \frac{1}{r^2\sin^2\theta}(E^2\psi)\left[\frac{\partial\psi}{\partial r}\underline{\delta}_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\cdot\underline{\delta}_\theta\right]$$

همچنین ،

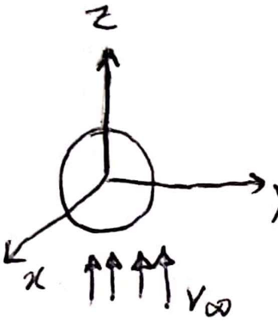
$$\underline{\nabla}\times[\underline{V}\times[\underline{\nabla}\times\underline{V}]] = \frac{1}{r\sin^2\theta}\left\{\frac{-1}{r^2}\cdot\frac{\partial(\psi,E^2\psi)}{\partial(r,\theta)} + \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin^2\theta}(E^2\psi)\left[\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right]\right\}\underline{\delta}_\phi$$

جایگذاری در معادله‌ی vorticity :

$$\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(E^2\psi)\underline{\delta}_\phi - \frac{1}{r\sin^2\theta}\left\{-\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\psi,E^2\psi)}{\partial(r,\theta)} + \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin^2\theta}(E^2\psi)\left[\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right]\right\}\underline{\delta}_\phi = \frac{\nu}{r\sin\theta}(E^2E^2\psi)\underline{\delta}_\phi$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(E^2\psi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial(\psi,E^2\psi)}{\partial(r,\theta)} - \frac{2(E^2\psi)}{r^2\sin^2\theta}\left[\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right] = \nu E^4\psi$$

2-9 حل مسئله استوکس با استفاده از تابع جریان



- یه جامد کروی به شعاع R توی سیالی قرار داره. سیال دور از جامد کروی سرعتش V_∞ ه و در راستای محور z ه
- قصد داریم نیروی لازم واسه‌ی ثابت نگه‌داشتن جامد کروی رو حساب کنیم
- واسه‌ی این کار اول باید توزیع سرعت و فشار رو حول جامد کروی بدست بیاریم

2-9-1 بدست آوردن توزیع سرعت

- معادله حاکم :

$$\frac{\partial}{\partial t}(E^2\psi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial(\psi,E^2\psi)}{\partial(r,\theta)} - \frac{2(E^2\psi)}{r^2\sin^2\theta}\left[\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right] = \nu E^4\psi$$

- حالت پایا و جریان خزشی، نتیجه می‌ده :

$$\Longrightarrow E^4\psi = 0 \quad (1)$$

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

- شرایط مرزی مسئله :

B.C.#1: @ $r=R$: $v_r = 0$

B.C.#2: @ $r=R$: $v_\theta = 0$

B.C.#3: As $r\to\infty$: $\underline{v} \to v_\infty \underline{\delta}_z$

- روابط تبدیل :

$$v_r = \frac{-1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad v_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

$$\underline{v} = v_r\underline{\delta}_r + v_\theta\underline{\delta}_\theta, \quad \underline{\delta}_z = \cos\theta\,\underline{\delta}_r - \sin\theta\,\underline{\delta}_\theta$$

- پس شرایط مرزی تبدیل‌شون می‌شه :

B.C.#1: @ $r=R$: $\frac{-1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0$

B.C.#2: @ $r=R$: $\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0$

B.C.#3: As $r\to\infty$

$$\frac{-1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \longrightarrow v_\infty\cos\theta$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r} \longrightarrow -v_\infty\sin\theta$$

(6)

ـ واسه‌ی حل معادله (1) از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌کنیم :

$$\psi(r,\theta) = f(r)\cdot g(\theta) \xrightarrow[\text{چون با شرایط مرزی OK ه}]{g(\theta)=\sin^2\theta} \psi(r,\theta) = f(r)\cdot \sin^2\theta$$

ـ حالا بریم که معادله رو ساده کنیم :

$$E^2E^2\psi(r,\theta) = E^2E^2\left(f(r)\cdot\sin^2\theta\right)$$

$$= E^2\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]f(r)\cdot\sin^2\theta$$

$$= E^2\left[\frac{d^2f}{dr^2}\cdot\sin^2\theta + \frac{f(r)}{r^2}\cdot\sin\theta\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial(\sin^2\theta)}{\partial\theta}\right)\right]$$

$$= E^2\left[\frac{d^2f}{dr^2}\cdot\sin^2\theta - \frac{2}{r^2}\cdot f(r)\cdot\sin^2\theta\right]$$

$$= E^2\left[\frac{d^2f}{dr^2} - \frac{2}{r^2}f(r)\right]\sin^2\theta \quad , F(r) = \frac{d^2f}{dr^2} - \frac{2}{r^2}f(r)$$

$$= E^2\left(F(r)\cdot\sin^2\theta\right) = \left[\frac{d^2F}{dr^2} - \frac{2}{r^2}F\right]\sin^2\theta$$

$$= \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\right]\left[\frac{d^2f}{dr^2} - \frac{2}{r^2}f\right]\sin^2\theta = 0$$

$$\Longrightarrow \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\right]\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\right]f(r)\cdot\sin^2\theta = 0$$

$$\xrightarrow{\sin\theta\neq 0} \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\right]\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\right]f(r) = 0 \quad (2)$$

ـ این یه معادله‌ی Cauchy-Euler ، مرتبه 4 :

$$a_n x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = 0$$

ـ توی حالت کلی واسه‌ی حل این معادله از مرتبه n ، می‌ذاریم : $y = x^m$

$$f(r) = C\cdot r^m \Longrightarrow \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\right]\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\right]C\cdot r^m = 0$$

$$\xRightarrow{\text{بعد از حل}} m = -1, 1, 2, 4 \Longrightarrow f(r) = C_1 r^{-1} + C_2 r + C_3 r^2 + C_4 r^4$$

ـ بنابراین :

$$\psi(r,\theta) = f(r)\cdot\sin^2\theta = \left(C_1 r^{-1} + C_2 r + C_3 r^2 + C_4 r^4\right)$$

ـ در نتیجه :

$$V_r = \frac{-1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{-1}{r^2\sin\theta}\left[C_1 r^{-1} + C_2 r + C_3 r^2 + C_4 r^4\right]2\times\sin\theta\times\cos\theta$$

$$\Longrightarrow V_r = \frac{-2}{r^2}\left(C_1 r^{-1} + C_2 r + C_3 r^2 + C_4 r^4\right)\cos\theta$$

$$V_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(-C_1 r^{-2} + C_2 + 2C_3 r + 4C_4 r^3\right)\sin^2\theta$$

$$\Longrightarrow V_\theta = \left(-C_1 r^{-3} + C_2 r^{-1} + 2C_3 + 4C_4 r^2\right]\sin\theta$$

- پیاده سازی B.C#3 : As $r \to \infty$

- B.C.#3. $\frac{-2}{r^2}\left[C_1 r^{-1}+C_2 r+C_3 r^2+C_4 r^4\right]\cos\theta \longrightarrow V_\infty \cos\theta \, \underline{\delta}_r$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} C_3 = \frac{-V_\infty}{2} \\ C_4 = 0 \end{array} \right.$$

- پیاده سازی بقیه‌ی شرطها :

B.C.#1: $\frac{-2}{R^2}\left[C_1 R^{-1}+C_2 R-\frac{V_\infty}{2}R^2\right]\cos\theta = 0$

B.C.#2: $\left[-C_1 R^{-3}+C_2 R^{-1}-V_\infty\right]\sin\theta = 0$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} C_1 = \frac{-V_\infty}{4}R^2 \\ C_2 = \frac{3}{4}V_\infty R \end{array} \right.$$

- در نتیجه :

$$\left| \begin{array}{l} V_r = V_\infty\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{R}{r}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]\cos\theta \\ V_\theta = -V_\infty\left[1-\frac{3}{4}\left(\frac{R}{r}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]\sin\theta \end{array} \right.$$

2-4-2 بدست آوردن توزیع فشار

- برای این منظور از معادله‌ی نویر-استوکس استفاده می‌کنیم :

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\underline{\nabla} p + \mu \nabla^2 \underline{v}$$

- با توجه به اینکه در مسئله‌ی stokes ، حالت پایاست و $Re \to 0$:

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{v} = \underline{0} \quad (1)$$

- توی این مختصات داریم :

$$[\underline{\nabla} p]_r = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad [\underline{\nabla} p]_\theta = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad [\underline{\nabla} p]_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial p}{\partial \phi}$$

- مؤلفه‌های سرعت را بازنویسی کنیم :

$$V_r = g(r)\cdot\cos\theta \qquad \left| g(r) = V_\infty\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{R}{r}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right] \right.$$

$$V_\theta = h(r)\cdot\sin\theta \qquad \left| h(r) = -V_\infty\left[1-\frac{3}{4}\left(\frac{R}{r}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right] \right.$$

- محاسبه‌ی $[\nabla^2 \underline{v}]_r$:

$$[\nabla^2 \underline{v}]_r = \underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r)\right)}_{2} + \underbrace{\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)}_{3} - \underbrace{\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(V_\theta\sin\theta)}_{4}$$

$$(2) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r^2\cdot g(r)\cos\theta)\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}(r^2\cdot g(r))\right)\cos\theta$$

$$(3) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(g(r)\cos\theta)\right) = \frac{-2}{r^2}\cdot g(r)\cos\theta$$

$$(4) = \frac{-2}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(h(r)\cdot\sin^2\theta) = \frac{-4}{r^2}\cdot h(r)\cdot\cos\theta$$

$$\Rightarrow [\nabla^2 \underline{v}]_r = \left[\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}(r^2 g(r))\right) - \frac{2}{r^2}g(r) - \frac{4}{r^2}h(r)\right]\cos\theta$$

$$\Rightarrow [\nabla^2 \underline{v}]_r = 3V_\infty \frac{R}{r^3}\cos\theta$$

⑦

محاسبه‌ی $[\nabla^2 \underline{v}]_\theta$:

$$[\nabla^2 \underline{v}]_\theta = \underbrace{\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)}_{⑤} + \underbrace{\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\sin\theta)\right)}_{⑥} + \underbrace{\frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial v_r}{\partial\theta}}_{⑦}$$

$$⑤ = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{\partial}{\partial r}(h(r)\cdot\sin\theta)\right) = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dh(r)}{dr}\right)\sin\theta$$

$$⑥ = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(h(r)\cdot\sin^2\theta)\right) = -\frac{2}{r^2}\cdot h(r)\sin\theta$$

$$⑦ = \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(g(r)\cos\theta) = \frac{-2}{r^2}g(r)\sin\theta$$

$$\Rightarrow [\nabla^2 \underline{v}]_\theta = \left[\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dh(r)}{dr}\right) - \frac{2}{r^2}h - \frac{2}{r^2}g\right]\sin\theta$$

$$\Rightarrow [\nabla^2 \underline{v}]_\theta = \frac{3}{2}v_\infty\frac{R}{r^3}\sin\theta$$

حالا می‌ریم سراغ حل مولفه‌های r و θ معادله‌ی ① :

$$r\text{-component:}\quad \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r} = 3\left(\frac{\mu v_\infty}{R^2}\right)\left(\frac{R}{r}\right)^3\cos\theta \quad ⑧$$

$$\theta\text{-component:}\quad \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial\theta} = \frac{3}{2}\left(\frac{\mu v_\infty}{R}\right)\left(\frac{R}{r}\right)^2\sin\theta \quad ⑨$$

$$\int ⑧ \Rightarrow \quad \mathcal{P} = -\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{\mu v_\infty}{R}\right)\left(\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta + k(\theta)$$

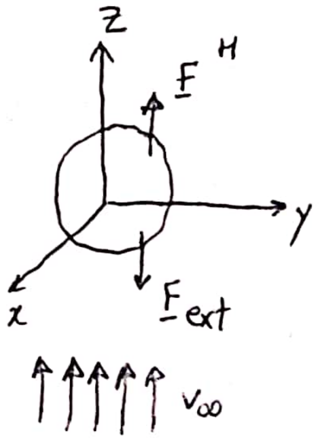
$$\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\theta} \overset{?}{=} ⑨ \Rightarrow \frac{dk}{d\theta} = 0 \Rightarrow k = \text{constant}$$

سرانجام:

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{P} &= \frac{-3}{2}\cdot\frac{\mu v_\infty}{R}\cdot\frac{R^2}{r^2}\cos\theta + k\\ \mathcal{P} &= P + \rho g z\end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{P = -\rho g z - \frac{3}{2}\frac{\mu v_\infty}{R}\left(\frac{R}{r}\right)^2\cos\theta + k}$$

$$r\to\infty,\ z=0 \Rightarrow \text{As } P\to P_0 \Rightarrow k = P_0$$

$\boxed{2\text{-}4\text{-}3}$ محاسبه‌ی نیروی لازم واسه‌ی ثابت نگه‌داشتن جامد کروی



با استفاده از قانون دوم نیوتن: برآیند نیروهای اعمال شده بر روی ذره = شتاب ذره × جرم ذره

$$\xrightarrow{\text{در اینجا}} \quad " = \underline{0} \Rightarrow \underline{F}_{ext} + \underline{F}^H = 0 \Rightarrow \underline{F}_{ext} = -\underline{F}^H$$

پس لازمه که $\underline{F}^H$ محاسبه بشه ($\underline{F}^H$ یعنی نیروی اعمالی روی ذره از محیط اطراف):

$$\underline{F}^H = \oint_A \hat{\underline{n}}\cdot\underline{\underline{\phi}}\,ds$$

داریم:

$$\underline{\underline{\phi}} = \phi_{rr}\underline{\delta}_r\underline{\delta}_r + \phi_{r\theta}\underline{\delta}_r\underline{\delta}_\theta + \phi_{r\phi}\underline{\delta}_r\underline{\delta}_\phi + \phi_{\theta r}\underline{\delta}_\theta\underline{\delta}_r + \phi_{\theta\theta}\underline{\delta}_\theta\underline{\delta}_\theta + \phi_{\theta\phi}\underline{\delta}_\theta\underline{\delta}_\phi + \phi_{\phi r}\underline{\delta}_\phi\underline{\delta}_r + \phi_{\phi\theta}\underline{\delta}_\phi\underline{\delta}_\theta + \phi_{\phi\phi}\underline{\delta}_\phi\underline{\delta}_\phi$$

$$,\ \hat{\underline{n}} = -\underline{\delta}_r$$

- با توجه به اینکه توی این مسئله فقط مؤلفه‌ی z نیرو غیرصفره، فقط به محاسبه‌ی همون می‌پردازیم :

$$F_z = \underline{F}^H\cdot\underline{\delta}_z = \oint_A [-\underline{\delta}_r\cdot\underline{\underline{\phi}}]\cdot\underline{\delta}_z\, dS \quad , \quad \underline{\delta}_z = \cos\theta\,\underline{\delta}_r - \sin\theta\,\underline{\delta}_\theta$$

$$[\underline{\delta}_r\cdot\underline{\underline{\phi}}]\cdot\underline{\delta}_z = (\phi_{rr}\underline{\delta}_r + \phi_{r\theta}\underline{\delta}_\theta + \phi_{r\phi}\underline{\delta}_\phi)\cdot(\cos\theta\,\underline{\delta}_r - \sin\theta\,\underline{\delta}_\theta) = \phi_{rr}\cos\theta - \phi_{r\theta}\sin\theta$$

$$dS = r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi \qquad \Longrightarrow F_z = \oint_A (\phi_{rr}\cos\theta - \phi_{r\theta}\sin\theta)\, r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

- می‌ریم که ϕ های مورد نیاز رو حساب کنیم :

$$\underline{\underline{\phi}} = \underline{\underline{\tau}} + p\,\underline{\underline{\delta}} + \rho\,\underline{v}\,\underline{v}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_{rr} = \tau_{rr} + p\,\delta_{rr} + \rho v_r v_r = \tau_{rr} + p + \rho v_r v_r \\ \phi_{r\theta} = \tau_{r\theta} + p\,\delta_{r\theta} + \rho v_r v_\theta = \tau_{r\theta} + \rho v_r v_\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_{rr} = -2\mu \dfrac{\partial v_r}{\partial r} \\ \tau_{r\theta} = -\mu\left[r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{v_\theta}{r}\right) + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] \end{cases} \xrightarrow[\text{در حساب کردیم}]{v_\theta,\ v_r} \begin{cases} \tau_{rr} = \dfrac{3\mu v_\infty}{R}\left[-\left(\dfrac{R}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{R}{r}\right)^4\right] & (1) \\ \tau_{r\theta} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\mu v_\infty}{R}\left(\dfrac{R}{r}\right)^4 \sin\theta & (2) \end{cases}$$

- در نتیجه :

$$F_z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\phi_{rr}\cos\theta - \phi_{r\theta}\sin\theta)_{r=R} R^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [(\tau_{rr} + p + \rho v_r v_r)\cos\theta - (\tau_{r\theta} + \rho v_r v_\theta)\sin\theta]_{r=R} R^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$\underset{v_r = v_\theta = 0}{\overset{@r=R}{=\!=}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [(\tau_{rr} + p)\cos\theta - \tau_{r\theta}\sin\theta]_{r=R} R^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

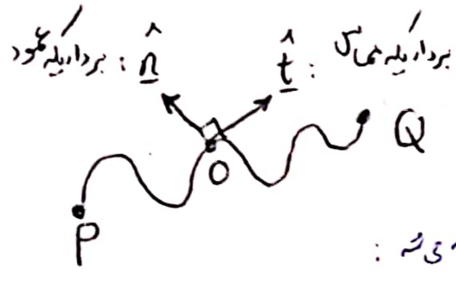
$$\underset{+P}{\overset{(1),(2)}{=\!=}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Big[\Big\{\frac{3\mu v_\infty}{R}\Big[-\Big(\frac{R}{r}\Big)^2 + \Big(\frac{R}{r}\Big)^4\Big] + P_0 - \rho g z - \frac{3}{2}\frac{\mu v_\infty}{R}\Big(\frac{R}{r}\Big)^2\cos\theta\Big\}\cos\theta$$

$$- \Big\{\frac{3}{2}\frac{\mu v_\infty}{R}\Big(\frac{R}{r}\Big)^4\sin\theta\Big\}\sin\theta\Big]_{r=R} R^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$\overset{z = R\cos\theta}{=\!=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Big[\Big\{P_0 - \rho g R\cos\theta - \frac{3}{2}\frac{\mu v_\infty}{R}\cos\theta\Big\}\cos\theta - \Big\{\frac{3}{2}\frac{\mu v_\infty}{R}\sin\theta\Big\}\sin\theta\Big] R^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$\Longrightarrow F_z = \frac{4}{3}\pi R^3\rho g + 6\pi\mu R v_\infty$$

$\boxed{2-5}$ محاسبه‌ی شار حجمی سیال عبوری بین دو نقطه در جریان دو بعدی



- دو نقطه P, Q
  - که به دلخواه انتخاب شدن و توی یه صفحه‌ی جریان قرار دارن در نظر بگیر.
  - اینا رو با یه منحنی دلخواه بهم وصل می‌کنیم
  - می‌خوایم که شار حجمی سیال عبوری از بین دو نقطه رو به ازای عمود داده محاسبه کنیم که می‌شه :

$$J = \int_l (\underline{u}\cdot\hat{\underline{n}})\, \underbrace{dl}_{\text{the distance along the curve}}$$

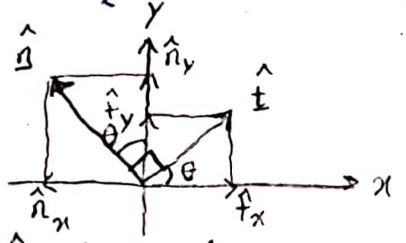
ـ داریم :

$$\underline{u}=u\,\underline{\delta}_x+v\,\underline{\delta}_y=\frac{\partial\psi}{\partial y}\underline{\delta}_x-\frac{\partial\psi}{\partial x}\underline{\delta}_y \quad , \quad \hat{\underline{n}}=\hat{n}_x\underline{\delta}_x+\hat{n}_y\underline{\delta}_y$$

ـ پس :

$$J=\int_l(\underline{u}\cdot\hat{\underline{n}})\,dl \Rightarrow J=\int_l\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\hat{n}_x-\frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{n}_y\right)dl \quad (1)$$

ـ از اونجایی که $\hat{\underline{t}}$ و $\hat{\underline{n}}$ به هم عمودن :



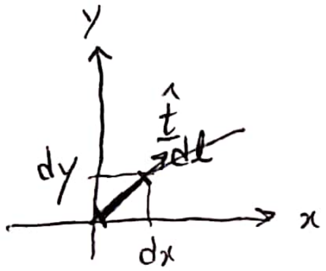
$$\hat{\underline{t}}=\hat{t}_x\underline{\delta}_x+\hat{t}_y\underline{\delta}_y$$

$$\begin{cases}\hat{t}_x=\cos\theta\\ \hat{t}_y=\sin\theta\\ \hat{n}_x=-\sin\theta\\ \hat{n}_y=\cos\theta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\hat{n}_x=-\hat{t}_y\\ \hat{n}_y=\hat{t}_x\end{cases}$$

ـ که درنتیجه ش :

$$(1)\Rightarrow J=-\int_l\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\hat{t}_y+\frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{t}_x\right)dl \quad (2)$$

ـ از اونطرف :



$$d\underline{l}=\hat{\underline{t}}\,dl=(\hat{t}_x\,dl)\underline{\delta}_x+(\hat{t}_y\,dl)\underline{\delta}_y$$

$$d\underline{l}=(dx)\underline{\delta}_x+(dy)\underline{\delta}_y \Rightarrow \begin{cases}\hat{t}_x=\frac{dx}{dl}\\ \hat{t}_y=\frac{dy}{dl}\end{cases}$$

ـ درنهایت :

$$(2)\Rightarrow J=-\int_l\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dl}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dl}\right)dl$$

$$\Rightarrow J=-\int_l\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial x}dx\right)=-\int_l d\psi \Rightarrow J=\psi(P)-\psi(Q)$$

2-6 جریان غیرچرخشی

ـ توی معادله ی vorticity

که این شکلیه ، $\underline{\omega}=\nabla\times\underline{V}$ ، $\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\underline{V}\cdot\nabla$ ، $\frac{D\underline{\omega}}{Dt}=\nu\nabla^2\underline{\omega}+\underline{\omega}\cdot\nabla\underline{V}$

اگه که بیام از ترم $\nu\nabla^2\underline{\omega}$ جلوی بقیه ی ترما صرف نظر کنیم، اونوقت :

$$\frac{D\underline{\omega}}{Dt}=\underline{\omega}\cdot\nabla\underline{V} \quad (1)$$

می دونیم که اگه حالت پایا داشته باشیم : $\frac{\partial\underline{\omega}}{\partial t}=0$ میشه

حالا می خوایم بدونیم که واسه ی جریان دو بعدی توی دستگاه کارتزین و استوانه ای، $\underline{\omega}\cdot\nabla\underline{V}$ به چه صورته

2-6-1 بررسی $\underline{\omega}\cdot\nabla\underline{V}$ واسه ی جریان دو بعدی توی دستگاه کارتزین

$$\begin{cases}\underline{V}=V_x\underline{\delta}_x+V_y\underline{\delta}_y+V_z\underline{\delta}_z\\ V_x=V_x(x,y)\\ V_y=V_y(x,y)\\ V_z=0\end{cases}$$

$$\underline{\omega}=\nabla\times\underline{V}=\omega_x\underline{\delta}_x+\omega_y\underline{\delta}_y+\omega_z\underline{\delta}_z$$

$$[\nabla\times\underline{V}]_x=\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z}=0$$

$$[\nabla\times\underline{V}]_y=\frac{\partial V_x}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial x}=0$$

$$[\nabla\times\underline{V}]_z=\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}\neq 0$$

$$\Rightarrow \underline{\omega}=\omega_z\underline{\delta}_z$$

ـ در نتیجه :

$$\underline{\omega}\cdot\nabla\underline{V}=(\omega_z\underline{\delta}_z)\cdot\left(\underline{\delta}_x\frac{\partial}{\partial x}+\underline{\delta}_y\frac{\partial}{\partial y}+\underline{\delta}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\underline{V}$$
$$=\omega_z\frac{\partial\underline{V}}{\partial z}=\omega_z\frac{\partial}{\partial z}(V_x\underline{\delta}_x+V_y\underline{\delta}_y)$$
$$=\omega_z\underline{\delta}_x\frac{\partial V_x}{\partial z}+\omega_z\underline{\delta}_y\frac{\partial V_y}{\partial z}\Rightarrow\underline{\underline{\omega}\cdot\nabla\underline{V}=0}$$

2-6-2 | بررسی $\underline{\omega}\cdot\nabla\underline{V}$ واسه‌ی جریانِ دوبعدی توی سیستمِ استوانه‌ای

$$\underline{V}=V_r\underline{\delta}_r+V_\theta\underline{\delta}_\theta+V_z\underline{\delta}_z$$
$$V_r=V_r(r,\theta)$$
$$V_\theta=V_\theta(r,\theta)$$
$$V_z=0$$

$$\underline{\omega}=\nabla\times\underline{V}=\omega_r\underline{\delta}_r+\omega_\theta\underline{\delta}_\theta+\omega_z\underline{\delta}_z$$
$$[\nabla\times\underline{V}]_r=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V_z}{\partial\theta}-\frac{\partial V_\theta}{\partial z}=0$$
$$[\nabla\times\underline{V}]_\theta=\frac{\partial V_r}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial r}=0$$
$$[\nabla\times\underline{V}]_z=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta)-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\neq0$$
$$\Rightarrow\underline{\omega}=\omega_z\underline{\delta}_z$$

ـ در نتیجه :

$$\underline{\omega}\cdot\nabla\underline{V}=(\omega_z\underline{\delta}_z)\cdot\left(\underline{\delta}_r\frac{\partial}{\partial r}+\underline{\delta}_\theta\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}+\underline{\delta}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\underline{V}$$
$$=\omega_z\frac{\partial\underline{V}}{\partial z}=\omega_z\frac{\partial}{\partial z}(V_r\underline{\delta}_r+V_\theta\underline{\delta}_\theta)$$
$$=\omega_z\underline{\delta}_r\frac{\partial V_r}{\partial z}+\omega_z\underline{\delta}_\theta\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\Rightarrow\underline{\underline{\omega}\cdot\nabla\underline{V}=0}$$

2-6-3 | معادله‌ی جریانِ غیرچرخشی

ـ واسه‌ی یه جریانِ دوبعدی توی مختصات کارتزین یا استوانه‌ای توی حالتِ پایا ← معادله‌ی ① تبدیل می‌شه به : $\underline{V}\cdot\nabla\underline{\omega}=0$

← که یعنی $\underline{\omega}$ در یه streamline ثابته

ـ حالا اینو ساده می‌کنیم ← توی مختصات کارتزین :

$$\nabla\underline{\omega}=\nabla(\omega_z\underline{\delta}_z)=\left(\underline{\delta}_x\frac{\partial}{\partial x}+\underline{\delta}_y\frac{\partial}{\partial y}+\underline{\delta}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(\omega_z\underline{\delta}_z)$$
$$=\left(\underline{\delta}_x\frac{\partial\omega_z}{\partial x}+\underline{\delta}_y\frac{\partial\omega_z}{\partial y}\right)\underline{\delta}_z=(\nabla\omega)\underline{\delta}_z$$

← ~ ~ استوانه‌ای :

$$\nabla\underline{\omega}=\nabla(\omega_z\underline{\delta}_z)=\left(\underline{\delta}_r\frac{\partial}{\partial r}+\underline{\delta}_\theta\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}+\underline{\delta}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(\omega_z\underline{\delta}_z)$$
$$=\left(\underline{\delta}_r\frac{\partial\omega_z}{\partial r}+\underline{\delta}_\theta\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\omega_z}{\partial\theta}\right)\underline{\delta}_z=(\nabla\omega)\underline{\delta}_z$$

ـ پس ،

$$\underline{V}\cdot\nabla\underline{\omega}=0\Rightarrow\underline{V}\cdot[(\nabla\omega)\underline{\delta}_z]=0$$
$$\Rightarrow[\underline{V}\cdot\nabla\omega]\underline{\delta}_z=0\Rightarrow\underline{\underline{V}\cdot\nabla\omega=0}$$

ـ که یعنی سیالی که وقتی دور از جسم داشتیم $\underline{\omega}=0$ باشه ، اونوقت توی کل جریان $\underline{\omega}=0$ ← (جریانِ غیرچرخشی)

ـ کِی می‌شه از $\nu\nabla^2\underline{\omega}$ صرف‌نظر کرد ← جریانِ سیالات با ویسکوزیته‌ی کم توی $Re\gg1$ ✓

← نزدیکی‌های دیواره نمی‌شه ✗

2-7 جریان پتانسیلی

- جریان پتانسیلی ← جریانی که توش هم $\underline{\nabla}\times\underline{v}=\underline{0}$ داریم: $\rho = cte$

← دامنه‌ی این جریان:

$$\begin{cases}\underline{\nabla}\cdot\underline{v}=0\\ \underline{\nabla}\times\underline{v}=0\end{cases}$$

← برنامه اینه که بگیم اگه یه سیال پتانسیلی توی کارتزین یا استوانه‌ای داشتیم، می‌شه با حل این دو تا، پروفایل سرعت و بعد از اون هم پروفایل فشار رو بدست آورد.

- جریان پتانسیلی دو بعدی توی دستگاه کارتزین

← می‌دونیم که:

$$\begin{cases}\underline{v}=v_x\underline{\delta}_x+v_y\underline{\delta}_y+v_z\underline{\delta}_z\\ v_x=v_x(x,y)\\ v_y=v_y(x,y)\\ v_z=0\end{cases}
\qquad
\begin{cases}\underline{\nabla}\cdot\underline{v}=0\\ \underline{\nabla}\times\underline{v}=0\end{cases}
\Downarrow
\begin{cases}\dfrac{\partial v_x}{\partial x}+\dfrac{\partial v_y}{\partial y}=0\\[2mm] \dfrac{\partial v_x}{\partial y}-\dfrac{\partial v_y}{\partial x}=0\end{cases}$$

← قبلش می‌دونیم که تابع جریان، اینطوری تعریف می‌شه:

$$v_x=-\frac{\partial\psi}{\partial y}\ ,\ v_y=\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

← حالا می‌گیم که:

$$\text{if}\quad \underline{\nabla}\times\underline{v}=0 \implies \underline{v}=-\underline{\nabla}\phi \rightsquigarrow \text{velocity potential}$$

← که دامنه‌ی این جریان:

$$v_x=-\frac{\partial\phi}{\partial x}\ ,\ v_y=-\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

← حالا می‌تونیم اینا رو مقایسه کنیم:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial\phi}{\partial y}=\dfrac{-\partial\psi}{\partial x}\end{cases}
\begin{matrix}\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}}\\[4mm] \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}\end{matrix}
\begin{cases}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}\end{cases}$$

$$\xRightarrow{\oplus}\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \implies \underline{\nabla^2\phi=0}$$

← از اونور:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial\phi}{\partial y}=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\end{cases}
\begin{matrix}\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}\\[4mm] \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}}\end{matrix}
\begin{cases}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\\[2mm] -\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\end{cases}$$

$$\xRightarrow{\oplus}\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 \implies \underline{\nabla^2\psi=0}$$

← یعنی هر دوی $\phi(x,y)$ و $\psi(x,y)$، معادله‌ی لاپلاس دو بعدی رو تأمین می‌کنن. پس می‌شه $\nabla^2\phi=0$ یا $\nabla^2\psi=0$ رو با در نظر گرفتن شرایط مرزی مربوطه حل کرد و ϕ یا ψ رو بدست آورد و v_x و v_y هم از اونا بدست میاد.

- جریان دو بعدی پتانسیلی توی دستگاه استوانه‌ای ← توی اینجا هم می‌شه بدست آورد که :

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad , \quad \nabla^2 \psi = 0$$

← که :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

- محاسبه‌ی فشار سیال ← بعد از محاسبه‌ی سرعت ، نوبت فشاره

← معادله‌ی مادر :

$$\rho\left(\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \underline{\nabla}\frac{1}{2}V^2 - \underline{V}\times[\underline{\nabla}\times\underline{V}]\right) = -\nabla p \quad ②$$

← که با اعمال فرضیات جریان پتانسیلی دو بعدی :

$$② \Rightarrow \rho\,\underline{\nabla}\frac{1}{2}V^2 = -\underline{\nabla}p$$

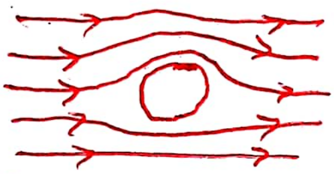
$$\xRightarrow{\rho = cte} \underline{\nabla}\frac{1}{2}\rho V^2 = -\underline{\nabla}p \Rightarrow \underline{\nabla}\left[\frac{1}{2}\rho V^2 + \underline{p}\right] = 0$$

$$\xRightarrow{\int} \frac{1}{2}\rho V^2 + p = cte$$

"The Bernoulli Equation"

- مثال ← استوانه‌ای با شعاع R را در نظر بگیرید. سیالی دور از استوانه با سرعت V_∞ جریان دارد.

← با در نظر گرفتن شرایط جریان پتانسیلی، سرعت سیال را بدست آورید.



- حل مثال ← معادله و شرایط مرزی‌ش :

$$\nabla^2 \psi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \\ @\, r = R: \quad \underline{u}\cdot\hat{\underline{n}} = 0 \\ \text{As } \underline{u} \to V_\infty \; : \; r \to \infty \end{cases}$$

← با توجه به اینکه :

$$\begin{cases} u_r = \frac{-1}{r}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ u_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases}$$

← حل معادله‌ی لاپلاس به روش جداسازی متغیرها داریم :

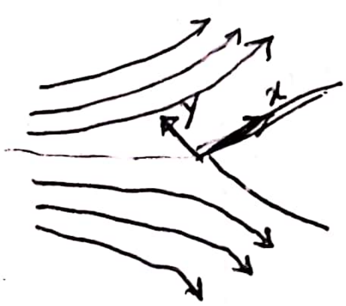
$$\psi = r\sin\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)$$

← ...

③ معادلات لایه مرزی برای جریان دو بعدی

$\boxed{3-1}$ معادلات لایه مرزی برای جریان دو بعدی در مختصات کارتزین

- با استفاده از روش مرتبه‌ی بزرگی به حل می‌پردازیم.



- معادلات مورد بررسی ← پیوستگی :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

← حرکت

$$\rho\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}\right)$$

$$\rho\left(V_x\frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}\right)$$

- طول‌های مشخصه : ضخامت لایه مرزی (δ_0) - سرعت در لبه‌ی لایه مرزی (V_∞) - طول مشخصه در راستای x (l_0)

$$\delta_0 \ll l_0$$

(10)

order of magnitude

ـ با توجه به اینکه سرعت از 0 تا V_∞ در لایه‌ی مرزی تغییر می‌کند ،

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = O\left(\frac{V_\infty - 0}{\delta_0}\right) = O\left(\frac{V_\infty}{\delta_0}\right)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = O\left(\frac{V_\infty - 0}{l_0}\right) = O\left(\frac{V_\infty}{l_0}\right)$$

ـ با توجه به معادله‌ی پیوستگی ،

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V_y}{\partial y} = O\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right) = O\left(\frac{V_\infty}{l_0}\right)$$

$$\xRightarrow{\int} V_y = O\left(\frac{\delta_0}{l_0} V_\infty\right)$$

ـ ترم های انتقال مولکولیِ معادله حرکت در راستای x :

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} = O\left(V_\infty \frac{V_\infty}{l_0}\right) = O\left(\frac{V_\infty^2}{l_0}\right)$$

$$V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = O\left(\frac{\delta_0}{l_0} V_\infty \frac{V_\infty}{\delta_0}\right) = O\left(\frac{V_\infty^2}{l_0}\right)$$

ـ ترم های نفوذ مولکولی 〃 〃 〃 〃 〃 :

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} = O\left(\frac{V_\infty}{l_0^2}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = O\left(\frac{V_\infty}{\delta_0^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \Big/ \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = O\left(\frac{V_\infty / l_0^2}{V_\infty / \delta_0^2}\right) = O\left(\frac{\delta_0^2}{l_0^2}\right) \xRightarrow{l_0 \gg \delta_0} \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}$$

ـ از طرفی می‌خواهیم که توی این معادله، سمت چپ و راست از یه مرتبه‌ی بزرگی باشن، پس:

$$\rho \frac{V_\infty^2}{l_0} = O\left(\mu \frac{V_\infty}{\delta_0^2}\right) \Rightarrow \frac{\delta_0^2}{l_0} = O\left(\frac{\mu}{V_\infty \rho}\right) \Rightarrow \frac{\delta_0^2}{l_0^2} = O\left(\frac{\mu}{\rho V_\infty l_0}\right) \quad (*)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta_0}{l_0} = O\left(\sqrt{\frac{\mu}{\rho V_\infty l_0}}\right) \Rightarrow \frac{\delta_0}{l_0} = O\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right) \quad (*)$$

ـ حالا بریم سراغ معادله‌ی حرکت در راستای y :

$$\rho V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} = O\left(\rho V_\infty \frac{\delta_0 V_\infty}{l_0^2}\right) = O\left(\frac{\rho V_\infty^2 \delta_0}{l_0^2}\right)$$

$$\rho V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = O\left(\rho \frac{\delta_0}{l_0} V_\infty \frac{V_\infty}{l_0}\right) = O\left(\frac{\rho V_\infty^2 \delta_0}{l_0^2}\right)$$

$$\mu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} = O\left(\mu \frac{\delta_0 V_\infty}{l_0 \, l_0^2}\right) = O\left(\frac{\mu \delta_0 V_\infty}{l_0^3}\right)$$

$$\mu \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} = O\left(\mu \frac{\delta_0 V_\infty}{l_0 \delta_0^2}\right) = O\left(\mu \frac{V_\infty}{\delta_0 l_0}\right) \xrightarrow{\times \frac{V_\infty \delta_0}{V_\infty \delta_0}} O\left(\mu \frac{V_\infty^2 \delta_0}{V_\infty \delta_0^2 l_0}\right) \overset{\times \frac{l_0}{l_0}}{=} O\left(\mu \frac{V_\infty^2 \delta_0 l_0}{V_\infty \delta_0^2 l_0^2}\right)$$

$$\overset{(*)}{=} O\left(\mu \frac{V_\infty^2 \delta_0 l_0}{V_\infty l_0^2 \frac{\mu l_0^2}{\rho V_\infty l_0}}\right) = O\left(\frac{\rho V_\infty^2 \delta_0}{l_0^2}\right)$$

ـ در نتیجه توی این معادله :

$$\rho V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} \,,\, \rho V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \,,\, \mu \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \gg \mu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}$$

ـ حالا بریم سراغ ترم های فشار :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = O\left(\frac{\rho V_\infty^2}{l_0}\right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = O\left(\frac{\rho V_\infty^2 \delta_0}{l_0^2}\right) \Rightarrow \frac{\partial P / \partial x}{\partial P / \partial y} = O\left(\frac{\rho V_\infty^2 / l_0}{\rho V_\infty^2 \delta_0 / l_0^2}\right) = O\left(\frac{l_0}{\delta_0}\right) \gg 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} \gg \frac{\partial P}{\partial y}$$

- به عبارت دیگه، مسأله تغییر یافته، تابعیت ناچیزی از y داره و می‌شه اونو فقط تابعی از x گرفت.

- در کل معادله ی حرکت در راستای y از لحاظ مرتبه‌ی بزرگی، از معادله‌ی حرکت در راستای x کوچیکتره، می‌شه اصلن کنارش گذاشت

- در نهایت، معادلات لایه مرزی به این شکل می‌شن:

پیوستگی : $$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}=0$$

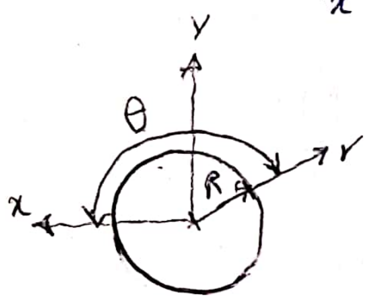
$x-$ حرکت : $$\rho\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}$$

$y-$ حرکت : $$0=\frac{\partial p}{\partial y}$$

- واسه‌ی حل معادلات فوق می‌شه p رو از حل مسئله‌ی جریان پتانسیل یا از اندازه‌گیری‌های تجربی بدست آورد و توی اینا گذاشت.

- شرایط مرزی واسه‌ی حل اینا ← روی دیواره : $@\, y=0:\quad V_x=V_y=0$

← توی لبه‌ی بیرونی لایه مرزی : $V_x\to V_\infty \quad As \quad y\to\delta_c$



3-2 معادلات لایه مرزی واسه‌ی جریان دو بعدی توی مختصات استوانه‌ای

- یه جریان دو بعدی حول یه استوانه رو در نظر بگیرید:

$$V_r=V_r(r,\theta)$$
$$V_\theta=V_\theta(r,\theta)$$
$$V_z=0$$

- معادلات مورد بررسی‌مون:

(1) $$\rho\left(V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}+\frac{V_rV_\theta}{r}\right)=-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta}+\mu\left[\frac{\partial^2V_\theta}{\partial r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V_\theta}{r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2V_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right]$$

(2) $$\rho\left(V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\cdot\frac{\partial V_r}{\partial\theta}-\frac{V_\theta^2}{r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left[\frac{\partial^2V_r}{\partial r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V_r}{r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2V_r}{\partial\theta^2}-\frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}\right]$$

(3) $$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(V_\theta)=0$$

- ابتدا معادلات فوق رو بدون بعد می‌کنیم:

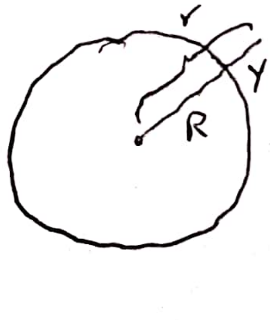
$$r^*=\frac{r}{R},\quad V_\theta^*=\frac{V_\theta}{u_c},\quad V_r^*=\frac{V_r}{u_c},\quad p^*=\frac{p}{\rho u_c^2}$$

(4) $$V_r^*\frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*}+\frac{V_\theta^*}{r^*}\cdot\frac{\partial V_\theta^*}{\partial\theta}+\frac{V_r^*V_\theta^*}{r^*}=-\frac{1}{r^*}\cdot\frac{\partial p^*}{\partial\theta}+\frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2V_\theta^*}{\partial r^{*2}}+\frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{V_\theta^*}{r^*}\right)+\frac{1}{r^{*2}}\cdot\frac{\partial^2V_\theta^*}{\partial\theta^2}+\frac{2}{r^{*2}}\cdot\frac{\partial V_r^*}{\partial\theta}\right]$$

(5) $$V_r^*\frac{\partial V_r^*}{\partial r^*}+\frac{V_\theta^*}{r^*}\cdot\frac{\partial V_r^*}{\partial\theta}-\frac{V_\theta^{*2}}{r^*}=-\frac{\partial p^*}{\partial r}+\frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2V_r^*}{\partial r^{*2}}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V_r^*}{r^*}\right)+\frac{1}{r^{*2}}\cdot\frac{\partial^2V_r^*}{\partial\theta^2}-\frac{2}{r^{*2}}\frac{\partial V_\theta^*}{\partial\theta}\right]$$

(6) $$\frac{1}{r^*}\cdot\frac{\partial}{\partial r^*}(r^*V_r^*)+\frac{1}{r^*}\cdot\frac{\partial V_\theta^*}{\partial\theta}=0$$

- حالا میایم و تغییر متغیری می‌دیم که ببریم به دستگاه کارتزین:



$$y=r-R$$
$$y^*=r^*-1$$
$$x=\theta$$
$$v^*=V_r^*$$
$$u^*=V_\theta^*$$

ـ اگر این تغییر متغیر را روی معادلات اعمال کنیم:

(7) $$v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}+\frac{u^*}{1+y^*}\cdot\frac{\partial u^*}{\partial x}+\frac{v^*u^*}{1+y^*}=\frac{-1}{1+y^*}\cdot\frac{\partial p^*}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}+\frac{\partial}{\partial y^*}\left(\frac{u^*}{1+y^*}\right)+\frac{1}{(1+y^*)^2}\cdot\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}+\frac{2}{(1+y^*)^2}\cdot\frac{\partial v^*}{\partial x}\right]$$

(8) $$v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*}+\frac{u^*}{1+y^*}\cdot\frac{\partial v^*}{\partial x}-\frac{u^{*2}}{1+y^*}=\cancel{\ }\frac{\partial p^*}{\partial y^*}+\frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}+\frac{\partial}{\partial y^*}\left(\frac{v^*}{1+y^*}\right)+\frac{1}{(1+y^*)^2}\cdot\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2}-\frac{2}{(1+y^*)^2}\cdot\frac{\partial u^*}{\partial x}\right]$$

(9) $$\frac{1}{1+y^*}\cdot\frac{\partial}{\partial y^*}\left([1+y^*]v^*\right)+\frac{1}{1+y^*}\cdot\frac{\partial u^*}{\partial x}=0$$

ـ از اونجاییکه با افزایش Re ، ضخامت لایه مرزی کوچیک می‌شه ، می‌شه y^* رو اینطوری scale کرد:

$y^*=YRe^{\alpha}$ → $\alpha<0$

$Y=O(Re^0)$ [یعنی Y مستقل از Re]

ـ معادله‌ی (9) براین اساس ← تبدیل می‌شه به:

$$\frac{Re^{-\alpha}}{1+YRe^{\alpha}}\cdot\frac{\partial}{\partial Y}\left([1+YRe^{\alpha}]v^*\right)+\frac{1}{1+YRe^{\alpha}}\cdot\frac{\partial u^*}{\partial x}=0$$

← توی حد $Re\to\infty$:

$$Re^{-\alpha}\cdot\frac{\partial v^*}{\partial Y}+\frac{\partial u^*}{\partial x}=0 \qquad (10)$$

← واسه‌ی اینکه معادله‌ی (10) برقرار باشه ، باید u^* و v^* به Re بستگی داشته باشند . می‌دونیم که u^* و v^* با جواب‌های شرایط بیرونی می‌بایست توی محدوده‌ی هم‌پوشانی ، match بشن

← توی لایه بیرونی داریم: $u_0=O(Re^0)$ ← مولفه x سرعت بیرونی

← پس توی لایه درونی هم u باید مستقل از Re باشد

← اما مولفه‌ی عمودی سرعت ← می‌دونیم که: as $r\to R$: $V_0\to 0$ ← مولفه y سرعت بیرونی

← پس: $V^*=O(Re^{\beta})$ که $\beta<0$

← یه تغییر متغیر scale می‌دیم:

$V^*=VRe^{\beta}$, $\beta<0$

$V=O(Re^0)$

← جاگذاری توی معادله (10):

$$(10)\Longrightarrow Re^{-\alpha}.Re^{\beta}\frac{\partial V}{\partial Y}+\frac{\partial u^*}{\partial x}=0$$

← از اونجایی که $\frac{\partial u^*}{\partial x}=O(Re^0)$ ، ترم اول هم باید مستقل از Re باشن که درنتیجه: $\alpha=\beta$

← و درنتیجه ، معادله‌ی پیوستگی تبدیل می‌شه:

(11) $$\frac{\partial V}{\partial Y}+\frac{\partial u^*}{\partial x}=0$$

ـ معادله‌ی (7) رو براساس $y^*=YRe^{\alpha}$ و $v^*=VRe^{\alpha}$ بازنویسی می‌کنیم:

$$VRe^{\alpha}\frac{\partial u^*}{\partial(YRe^{\alpha})}+\frac{u^*}{1+YRe^{\alpha}}\cdot\frac{\partial u^*}{\partial x}+\frac{VRe^{\alpha}u^*}{1+YRe^{\alpha}}=-\frac{1}{1+YRe^{\alpha}}\cdot\frac{\partial p^*}{\partial x}$$
$$+\frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial Y^2}Re^{-2\alpha}+\frac{\partial}{\partial(YRe^{\alpha})}\left(\frac{u^*}{1+YRe^{\alpha}}\right)+\frac{1}{1+YRe^{\alpha}}\cdot\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}+\frac{2Re^{\alpha}}{1+YRe^{\alpha}}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}\right]$$

← توی حد $Re\to\infty$:

$$\Rightarrow V\frac{\partial u^*}{\partial Y}+u^*\frac{\partial u^*}{\partial x}+u^*VRe^{\alpha}=-\frac{\partial p^*}{\partial x}$$
$$+\frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial Y^2}Re^{-2\alpha}+Re^{-\alpha}\cdot\frac{\partial u^*}{\partial Y}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}+2Re^{\alpha}\frac{\partial V}{\partial x}\right]$$

$$\Rightarrow V\frac{\partial u^*}{\partial Y}+u^*\frac{\partial u^*}{\partial x}+u^* V Re^{\alpha}=-\frac{\partial p^*}{\partial x}+\frac{Re^{-2\alpha}}{Re}\left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial Y^2}+Re^{\alpha}\frac{\partial u^*}{\partial Y}+Re^{2\alpha}\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}+2Re^{\alpha-3}\frac{\partial V}{\partial x}\right.$$

$$\xRightarrow{\alpha<0} V\frac{\partial u^*}{\partial Y}+u^*\frac{\partial u^*}{\partial x}=-\frac{\partial p^*}{\partial x}+Re^{-2\alpha-1}\cdot\frac{\partial^2 u^*}{\partial Y^2}$$

از اونطرف ترم های ویسکوز باید توی لایه مرزی بمونن، پس :

$$Re^{-2\alpha-1}=Re^{0}\Rightarrow \alpha=\frac{-1}{2}$$

$$V\frac{\partial u^*}{\partial Y}+u^*\frac{\partial u^*}{\partial x}=-\frac{\partial p^*}{\partial x}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial Y^2} \quad (12)$$

پس معادله‌ی (7) تبدیل میشه به :

معادله‌ی (8) رو براساس $y^*=YRe^{\alpha}$ ، $V^*=VRe^{\alpha}$ ساده می‌کنیم :

$$VRe^{\alpha}\frac{\partial(VRe^{\alpha})}{\partial(YRe^{\alpha})}+\frac{u^*}{1+YRe^{\alpha}}\cdot\frac{\partial(VRe^{\alpha})}{\partial x}-\frac{u^{*2}}{1+YRe^{\alpha}}=-\frac{\partial p^*}{\partial(YRe^{\alpha})}$$

$$+\frac{1}{Re}\left[Re^{-2\alpha}\cdot\frac{\partial^2(VRe^{\alpha})}{\partial Y^2}+\frac{\partial}{\partial(YRe^{\alpha})}\left(\frac{YRe^{\alpha}}{1+YRe^{\alpha}}\right)+\frac{1}{(1+YRe^{\alpha})^2}\cdot\frac{\partial^2(YRe^{\alpha})}{\partial x^2}-\frac{2}{(1+YRe^{\alpha})^2}\cdot\frac{\partial u^*}{\partial x}\right]$$

توی حد $Re\to\infty$:

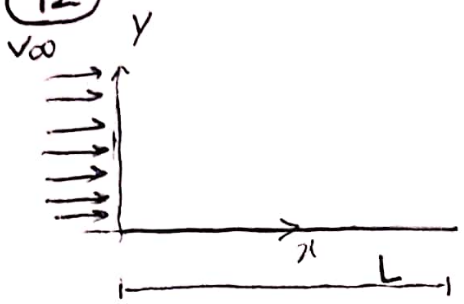
$$Re^{\alpha}V\frac{\partial V}{\partial Y}+Re^{\alpha}u^*\frac{\partial V}{\partial x}-u^{*2}=-Re^{-\alpha}\cdot\frac{\partial p^*}{\partial Y}+\frac{1}{Re}\left[Re^{-\alpha}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}+\frac{\partial V}{\partial Y}+Re^{\alpha}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-2\frac{\partial u^*}{\partial x}\right]$$

$$\Rightarrow O(Re^{\alpha})-u^{*2}=-Re^{-\alpha}\cdot\frac{\partial p^*}{\partial Y}+O(Re^{-1})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p^*}{\partial Y}=O(Re^{+\alpha})\ \overset{\alpha=\frac{-1}{2}}{=\!=}\ O(Re^{-\frac{1}{2}})\xrightarrow{Re\to\infty}\frac{\partial p^*}{\partial Y}=0 \quad (13)$$

در نهایت، معادلات لایه مرزی به اینجا خلاصه میشن :

$$\begin{cases}(11)\quad \dfrac{\partial V}{\partial Y}+\dfrac{\partial u^*}{\partial x}=0\\[2mm] (12)\quad V\dfrac{\partial u^*}{\partial Y}+u^*\dfrac{\partial u^*}{\partial x}=-\dfrac{\partial p^*}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 u^*}{\partial Y^2}\\[2mm] (13)\quad \dfrac{\partial p^*}{\partial Y}=0\end{cases}$$



3-3 جریان سیال بر روی یه سطح افقی توی Re های خیلی بالا

3-3-1 ناحیه‌ی بیرونی

- جریان دو بعدی توی مختصات کارتزین و سیال تراکم ناپذیر در حالت پایا داریم ،

پس :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{u} = 0 \\ \nabla \times \underline{u} = \underline{0} \end{cases}$$

- پس شرایط جریان پتانسیلی برقراره :

$$\begin{cases} u_x = -\dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_y = \dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \nabla^2 \psi = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

- شرایط مرزی هم میشن :

$$\begin{cases} \underline{u} \cdot \underline{n} = 0 \quad (= u_y) & @\ y=0 \\ \underline{u} \to \underline{V}_\infty & \text{As } y \to \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = 0 & @\ y=0 \\ -\dfrac{\partial \psi}{\partial y} \to V_\infty & \text{As } y \to \infty \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x} \to 0 & \text{As } y \to \infty \end{cases}$$

- جواب معادله‌ی حاکم که خاصیت بیرونی لایه مرزی شده ،

for all x and y : $\psi = -y V_\infty$

$$\Rightarrow u_x = V_\infty$$

3-3-2 ناحیه‌ی درونی

- معادلات حاکم و شرایط مرزی :

$$\begin{cases} ① \ \dfrac{\partial V_x}{\partial x} + \dfrac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \\ ② \ \rho\left(V_x \dfrac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \dfrac{\partial V_x}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \\ ③ \ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_x = 0 & @\ y=0,\ x>0 \\ V_y = 0 & @\ y=0,\ x>0 \\ V_x \to V_\infty & \text{As } y \to \infty,\ x>0 \\ V_x = V_\infty & @\ x=0 \end{cases}$$

- برای حل:
  - از روش Combination of variables استفاده می‌کنیم
  - واسه V_x فرض می‌کنیم :
  - در صورت استفاده از شرط اول :

$$④ \quad V_x = F'(\eta) \quad , \eta = \frac{y}{g(x)}$$

$$F'(0) = 0$$

- حالا می‌ریم سراغ معادله ① :

$$\frac{\partial}{\partial x}(F'(\eta)) + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}(F'(\eta)) = -\frac{dF'(\eta)}{d\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\left(F''(\eta) \cdot \frac{-y}{g^2} g'\right) = F'' \cdot \eta \cdot \frac{g'}{g}$$

$$\Rightarrow dV_y = \frac{g'(x)}{g(x)} \eta \cdot F''(\eta)\, dy \xrightarrow{\int} V_y \Big|_{y=0}^{y} = \int_{y=0}^{y} g'(x) \cdot \eta F''(\eta) \cdot d\left(\frac{y}{g(x)}\right)$$

$$\Rightarrow V_y = \int_{y=0}^{y} g'(x) \cdot \eta F''(\eta) \cdot d\eta$$

$$\Rightarrow V_y = g'(x)\int_{y=0}^{y} \eta F''(\eta)\,d\eta = g'(x)\int_{\eta=0}^{\eta} \eta F''(\eta)\,d\eta$$

$$\Rightarrow V_y = g'(x)\cdot\left(\eta F'(\eta) - F(\eta) + \underbrace{F(0)}_{0}\right) \quad ⑤$$

ـ واسه‌ی حل معادله‌ی ② ، باید $\frac{\partial p}{\partial x}$ رو هم داشته باشیم.

ـ ~~[illegible]~~ واسه‌ی اینکار

- می‌دونیم که توی لایه مرزی: $p = p(x)$
- پس می‌شه مقدار $\frac{\partial p}{\partial x}$ رو توی لبه‌ی لایه مرزی (درونی) به عنوان مقدارش توی معادله ② گذاشت:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\text{درونی}} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\text{بیرونی}}$$

- واسه‌ی لایه مرزی بیرونی داریم:

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + p = cte \quad , \quad V^2 = V_x^2 + V_y^2$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\rho V^2\right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{-1}{2}\rho V \times 2\frac{\partial V}{\partial x} = -\rho V\frac{\partial V}{\partial x}$$

- پس:

$$\lim_{y\to 0}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\text{بیرونی}} = \lim_{y\to 0} -\left(\rho V\frac{\partial V}{\partial x}\right) \overset{\text{شرط مرزی}}{=\!=} 0$$

- در نتیجه:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\text{درونی}} = 0$$

ـ قبل از اینکه بریم سراغ معادله‌ی ② بریم و ترم های لازم رو حساب کنیم:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(F'(\eta)) = -\frac{g'(x)}{g(x)}\eta\cdot F''(\eta) \quad , \quad \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(F'(\eta)) \quad , \quad \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(F'(\eta))$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(F'(\eta)) = \frac{d}{d\eta}(F'(\eta))\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y} = F''(\eta)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{g(x)}\right) = \frac{1}{g(x)}\cdot F''(\eta)$$

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{g(x)}\cdot F''(\eta)\right) = \frac{1}{g^2(x)}\cdot F'''(\eta)$$

$$V_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_x}{\partial y} = F'(\eta)\left(-\frac{g'(x)}{g(x)}\cdot\eta\cdot F''(\eta)\right) + g'(x)\left[\eta F'(\eta) - F(\eta)\right]\frac{F''(\eta)}{g(x)}$$

$$= -\frac{g'(x)}{g(x)}\cdot F(\eta)\cdot F''(\eta)$$

ـ حالا بریم سراغ معادله‌ی ②:

$$-\frac{g'(x)}{\cancel{g(x)}}\cdot F(\eta)\cdot F''(\eta) = \frac{\mu}{\rho}\times\frac{F'''(\eta)}{g^{\cancel{2}}(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{\rho}F'''(\eta) + g(x)\cdot g'(x)\cdot F(\eta)\cdot F''(\eta) = 0 \quad ⑥$$

$$\begin{cases} B.C.\#1: & F'(\eta=0)=0 \\ B.C.\#2: & F(\eta=0)=0 \\ B.C.\#3: & F'(\eta\to\infty)\to V_\infty \\ B.C.\#4: & F'\left(\frac{y}{g(0)}\right)=V_\infty \end{cases}$$

- با توجه به اینکه F' وقتی که $\eta \to \infty$ می‌شه V_∞ ، پس باید $g(x=0)=0$.
- از این طرف اگه بخوایم که معادله‌مون جواب داشته باشه باید $g(x)\cdot g'(x)$ به x بستگی نداشته باشه :

پس فرض می‌کنیم که :

$$g(x)\cdot g'(x)=\frac{\mu}{\rho}$$

- در نتیجه معادله (6) تبدیل می‌شه :

$$(7)\quad F'''(\eta)+F(\eta)\,F''(\eta)=0 \qquad \text{"Blasius Equation"}$$

که حل عددی داره دیگه توش

- حالا می‌ریم سراغ حل معادله‌ی :

$$g(x)\cdot g'(x)=\frac{\mu}{\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{d\left(g^2(x)\right)}{dx}=\frac{\mu}{\rho} \Rightarrow \frac{d\left(g^2(x)\right)}{dx}=2\frac{\mu}{\rho}$$

$$\Rightarrow g^2(x)=\frac{2\mu}{\rho}x+C_0 \xrightarrow[C_0=0]{g(x=0)=0} g(x)=\sqrt{2\frac{\mu}{\rho}x}$$

3-3-3 محاسبه‌ی نیروی وارد شونده به ازای مساحت سطح از سیال به سطح در راستای x

نیرویی که می‌خوایم

$$\underline{F}=(-\underline{\delta}_y)\cdot\underline{\underline{\phi}}\Big|_{\text{سطح}} \quad , \quad \underline{\underline{\phi}}=\underline{\underline{\tau}}+\rho\underline{\underline{\delta}}+\rho\underline{V}\,\underline{V}$$

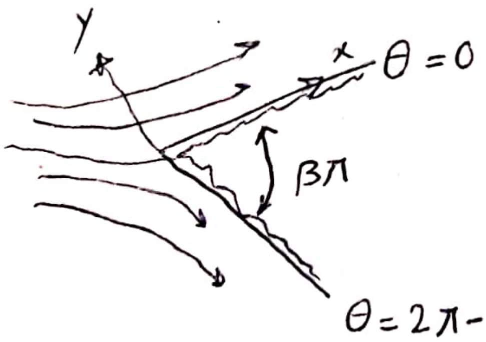
$$F_x=\underline{F}\cdot\underline{\delta}_x=-(\underline{\delta}_y\cdot\underline{\underline{\phi}})\cdot\underline{\delta}_x\Big|_{\text{سطح}}$$

$$-[\underline{\delta}_y\cdot\underline{\underline{\phi}}]\cdot\underline{\delta}_x=-\phi_{yx}=-(\pi_{yx}+\rho V_yV_x)=-(\tau_{yx}+\rho V_yV_x)$$

$$\Rightarrow F_x=-\left(-\mu\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}+\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)+\rho V_yV_x\right)_{\text{سطح}} \xrightarrow{V_x|_{\text{سطح}}=V_y|_{\text{سطح}}=0} +\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{y=0}$$

$$\Rightarrow F_x=\mu\,\frac{F''(\eta=0)}{g(x)} \Rightarrow F_x=\sqrt{\frac{\rho\mu}{2x}}\cdot F''(\eta=0)$$

3-4 جریان سیال حول یک گوه (Wedge) در Re های خیلی بالا



3-4-1 ناحیه‌ی بیرونی

- وضعیت : دو بعدی کارتزینی یا استوانه‌ای - حالت پایا -

سیال تراکم ناپذیر و μ ثابت - Re های خیلی بالا

- خواهیم داشت :

$$\begin{vmatrix}\nabla\cdot\underline{u}=0\\ \nabla\times\underline{u}=0\end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}\nabla^2\psi=0\\ \nabla^2\phi=0\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix}V_r=\frac{-1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=-\frac{\partial\phi}{\partial r}\\ V_\theta=\frac{\partial\psi}{\partial r}=-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\end{vmatrix}$$

B.C: $V_\theta=0$ @ $\theta=0,\ \frac{2\pi-\beta\pi}{2}$

- واسه‌ی تعیین ϕ یا ψ می‌بایستی معادله‌ی لاپلاس رو توی مختصات استوانه‌ای حل کنیم .
- ما با ϕ پیش می‌ریم

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad , \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

ـ جواب معادله لاپلاس فوق باید به صورت زیر باشه :

$$\phi = C.r^{\lambda}\cos\lambda\theta$$

$$\Rightarrow V_\theta = \frac{-1}{r}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{-1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(C.r^{\lambda}\cos\lambda\theta) = C.\lambda.r^{\lambda-1}\sin\lambda\theta$$

$$\text{B.C.} : C.\lambda.r^{\lambda-1}\sin\lambda\theta = 0 \quad @ \quad \theta = 0, \frac{2\pi-\beta\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\left[\lambda\frac{2\pi-\beta\pi}{2}\right] = 0 \Rightarrow \lambda\frac{2\pi-\beta\pi}{2} = n\pi \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Longrightarrow \lambda = \frac{2n}{2-\beta} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\lambda = \frac{2}{2-\beta}$$

ـ که فقط $\underline{n=1}$ قابل قبوله چون به ازای $\underline{n>1}$ ، پاسخ ها growing می شه .

ـ در نتیجه توی این لایه :

$$V_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}(C.r^{\lambda}\cos\lambda\theta) \Longrightarrow \begin{cases} V_r = -C\lambda r^{\lambda-1}\cos\lambda\theta \\ V_\theta = C.\lambda r^{\lambda-1}\sin\lambda\theta \\ \lambda = 2/2-\beta \end{cases}$$

ـ واسه ی تعیین سرعت توی لایه درونی لازمه که $V_x|_{y\to0}$ رو توی لایه ی بیرونی تعیین کنیم :

$$V_x\Big|_{y\to0}^{\text{بیرونی}} = V_r\Big|_{\theta\to0} = (-C\lambda r^{\lambda-1}\cos\lambda\theta)_{\theta\to0} = -C\lambda r^{\lambda-1}$$

$$\Rightarrow \underline{V_x\Big|_{y\to0} = Ax^m \quad : \quad A = -C\lambda \quad , \quad m = \lambda - 1}$$

$\boxed{3-4-2}$ لایه ی درونی

ـ معادلات حاکم و شرایط مرزی :

$$\begin{cases} ① \ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \\ ② \ \rho\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \\ ③ \ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{B.C.\#1:} \quad V_x = 0 \quad @ \ y = 0, \quad x>0 \\ \text{B.C.\#2:} \quad V_y = 0 \quad @ \ y = 0, \quad x>0 \\ \text{B.C.\#3:} \quad V_x \to \underset{u_0}{\underset{\parallel}{V_x\big|_{y\to0}}} \quad \text{As} \ y\to\infty, \ x>0 \end{cases}$$

ـ اول می ریم سراغ $\frac{\partial p}{\partial x}$:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\text{درونی}} = \lim_{y\to0}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\text{بیرونی}}$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + p = \text{cte} \Rightarrow p_{\text{بیرونی}} = \text{cte} - \frac{1}{2}\rho V^2 = \text{cte} - \frac{1}{2}\rho(V_x^2 + V_y^2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\text{درونی}} = -\rho u_0(x).\frac{du_0(x)}{dx}$$

ـ در نتیجه معادله ی ② تبدیل می شه به :

$$④ \ \rho\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}\right) = \rho u_0(x).\frac{du_0(x)}{dx} + \mu\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}$$

(19) $V_x(x,y)=u_0(x).F'(\eta) \quad , \eta=\frac{y}{g(x)}$

- از روش ترکیب متغیرها واسه‌ی حل استفاده می‌کنیم فرض می‌کنیم :

• u_0 رو بخاطر B.C#3 گذاشتیم اینجا

- اول می‌ریم که V_y رو براساس معادله‌ی (1) حساب کنیم :

$$\frac{\partial V_y}{\partial y}=-\frac{\partial V_x}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u_0(x).F'(\eta)\right)=\frac{du_0(x)}{dx}F'(\eta)+u_0\cdot\underbrace{\frac{\partial F'}{\partial x}}_{=\frac{\partial F'(\eta)}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{g(x)}\right)=y\left(-\frac{g'}{g^2}\right)=-\frac{g'}{g}\eta \Rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial x}=\frac{du_0(x)}{dx}\cdot F'(\eta)-\frac{g'(x)}{g(x)}u_0(x).\eta F''(\eta)$$

$$\int_{y=0}^{y}dV_y=-\int_{y=0}^{y}\frac{\partial V_x}{\partial x}dy=-\int_{y=0}^{y}\left[\frac{du_0(x)}{dx}\cdot F'(\eta)-\frac{g'(x)}{g(x)}u_0(x).\eta F''(\eta)\right]dy$$

$$=-\int_{y=0}^{y}\frac{du_0(x)}{dx}\cdot F'(\eta)\,dy+\int_{y=0}^{y}\frac{g'(x)}{g(x)}\cdot u_0(x).\eta F''(\eta)\,dy$$

$$=-\int_{\eta=0}^{\eta}g(x).\frac{du_0(x)}{dx}\cdot F'(\eta)\,d\eta+\int_{\eta=0}^{\eta}g'(x)\cdot u_0(x).\eta F''(\eta)\,d\eta$$

$$=-g(x).\frac{du_0(x)}{dx}\left[F(\eta)-F(0)\right]+g'(x).u_0(x)\left[\eta F'(\eta)-F(\eta)+F(\eta=0)\right]$$

$$\overset{F(\eta=0)=0}{\underset{V_y(y=0)=0}{=\!=}}\; -g(x).\frac{du_0(x)}{dx}F(\eta)+g'(x).u_0(x)\left[\eta.F'(\eta)-F(\eta)\right]$$

$$\Rightarrow V_y=-\frac{d}{dx}\left(g(x).u_0(x)\right)F(\eta)+g'(x).u_0(x)\eta.F'(\eta)$$

- حالا می‌ریم شرایط مرزی رو دوباره برحسب اینا بیان کنیم :

B.C.#1: $V_x=0$ @ $y=0,\ x>0$

$$V_x(x>0,y=0)=u_0(x>0).F'\left(\frac{y=0}{g(x>0)}\right)=0 \Rightarrow \text{B.C.\#1: } F'(\eta=0)=0$$

B.C.#2: $V_y=0$ @ $y=0,\ x>0$

$$V_y(x>0,y=0)=\frac{-d}{dx}\left(g(x>0).u_0(x>0)\right).F\left(\frac{y=0}{g(x>0)}\right)+g'(x>0).u_0(x>0).\left(\frac{y=0}{g(x>0)}\right).F'\left(\frac{y=0}{g(x)}\right)$$

B.C.#3: $V_x(x>0,y\to\infty)=u_0(x>0).F'\left(\frac{y\to\infty}{g(x>0)}\right)=u_0(x>0)$

B.C.#2: $F(\eta=0)=0$

B.C.#3: $F'(\eta\to\infty)=1$

B.C.#4: $g(0)=0$

ـ حالا می‌ریم که با V_x و V_y ، مقدمات جایگذاری توی معادله‌ی ④ رو تکمیل کنیم ؛

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}=\frac{du_0(x)}{dx}\cdot F'(\eta)-\frac{g'(x)}{g(x)}u_0(x)\cdot\eta F''(\eta)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(u_0(x)\cdot F'(\eta)\right)=\frac{u_0(x)}{g(x)}\cdot F''(\eta)$$

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_0(x)}{g(x)}\cdot F''(\eta)\right)=\frac{u_0(x)}{g^2(x)}\cdot F'''(\eta)$$

ـ حالا اینارو می‌ذاریم توی معادله‌ی ④ :

$$④\Rightarrow \rho\Big\{u_0(x)\cdot F'(\eta)\left[\frac{du_0(x)}{dx}\cdot F'(\eta)-\frac{g'(x)}{g(x)}u_0(x)\cdot\eta F''(\eta)\right]$$

$$+\left[-\frac{d}{dx}\left(g(x)\cdot u_0(x)\right)\cdot F(\eta)+g'(x)\cdot u_0(x)\cdot\eta F'(\eta)\right]\frac{u_0(x)}{g(x)}\cdot F''(\eta)\Big\}$$

$$=\rho u_0(x)\frac{du_0(x)}{dx}+\mu\frac{u_0(x)}{g^2(x)}\cdot F'''(\eta)$$

$$\Longrightarrow \rho\left[u_0u_0'F'^2-\frac{d}{dx}(gu_0)\cdot\frac{u_0}{g}FF''\right]=\rho u_0u_0'+\mu\frac{u_0}{g^2}F'''$$

$$\Longrightarrow \frac{\mu}{\rho}F'''(\eta)+g^2u_0'\left[1-F'^2\right]+g\frac{d}{dx}(gu_0)FF''=0 \quad ⑤$$

ـ واسه‌ی اینکه جوابِ $F'(\eta)$ ، تابع x نباشه باید ضرایبِ معادله هم تابع x نباشن، پس :

$$\begin{cases} g^2u_0'=\gamma & ⑥\\ g\dfrac{d}{dx}(gu_0)=\alpha & ⑦\end{cases}$$

$$u_0=Ax^m \Rightarrow u_0'=Amx^{m-1} \xrightarrow{⑥} g=\sqrt{\frac{\gamma}{Am}}\,x^{\frac{1-m}{2}}$$

$$gu_0=\sqrt{\frac{\gamma}{Am}}\,x^{\frac{1-m}{2}}\cdot Ax^m=\sqrt{\frac{A\gamma}{m}}\cdot x^{\frac{1+m}{2}}$$

$$\frac{d}{dx}(gu_0)=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{A\gamma}{m}}\cdot x^{\frac{1+m}{2}}\right)=\frac{1+m}{2}\sqrt{\frac{A\gamma}{m}}\cdot x^{\frac{m-1}{2}}$$

$$g\frac{d}{dx}(gu_0)=\sqrt{\frac{\gamma}{Am}}\,x^{\frac{1-m}{2}}\cdot\frac{1+m}{2}\sqrt{\frac{A\gamma}{m}}\,x^{\frac{m-1}{2}}=\frac{\gamma}{m}\cdot\frac{1+m}{2}\xrightarrow{⑦}\frac{\gamma}{m}\cdot\frac{1+m}{2}=\alpha \quad ⑧$$

ـ جایگذاریِ ⑥ ، ⑦ و ⑧ توی معادله‌ی ⑤ می‌ده :

$$\frac{\mu}{\rho}F'''(\eta)+\gamma\left[1-F'^2\right]+\alpha FF''=0 \Rightarrow F'''(\eta)+\gamma\frac{\rho}{\mu}\left[1-F'^2\right]+\alpha\frac{\rho}{\mu}FF''=0$$

ـ با فرضِ $\underline{\alpha=\frac{\mu}{\rho}}$ $\Longleftarrow$ $\underline{\gamma=\frac{\mu}{\rho}\frac{2m}{m+1}}$

ـ در نتیجه :

$$F'''+FF''+\frac{2m}{m+1}\left[1-F'^2\right]=0 \quad \text{"Falkner–Skan equation"} \quad ⑨$$

- می توانیم $\frac{2m}{m+1}$ را ساده کنیم :

$$\frac{2m}{m+1} = 2\,\frac{\lambda-1}{\lambda-1+1} = 2\,\frac{\lambda-1}{\lambda} = 2\,\frac{\frac{2}{2-\beta}-1}{\frac{2}{2-\beta}} = 2\,\frac{\frac{\cancel{2-2}+\beta}{\cancel{2-\beta}}}{\frac{2}{\cancel{2-\beta}}} = \beta$$

$$\xrightarrow{(1)} F'''(\eta) + F(\eta).F''(\eta) + \beta\left[1 - F'^{2}(\eta)\right] = 0$$

3-4-3 محاسبه‌ی نیروی وارد شده از طرف سیال به سطح در راستای x (به ازای واحد سطح)

$$\underline{F} = (-\underline{\delta}_y)\cdot\underline{\underline{\Phi}}\Big|_{\text{روی سطح}} \quad , \quad \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{\tau}} + P\underline{\underline{\delta}} + \rho\underline{V}\,\underline{V}$$

$$F_x = \underline{F}\cdot\underline{\delta}_x = -\left[(\underline{\delta}_y)\cdot\underline{\underline{\Phi}}\right]\cdot\underline{\delta}_x\Big|_{\text{روی سطح}}$$

$$\overset{\text{قبلاً بدست آورده‌ایم که}}{=\!=\!=} -\left[-\mu\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) + \rho V_y V_x\right]_{\text{روی سطح}} \overset{\text{روی سطح :}}{\underset{V_x = V_y = 0}{=\!=\!=}} \mu\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{\text{روی سطح}}$$

- همچنین بدست آورده بودیم که :

$$\begin{cases} V_x = u_0(x).\ F'(\eta) \quad , \quad \eta = \dfrac{y}{g(x)} \\ V_y = -\dfrac{d}{dx}\left(g(x).u_0(x)\right).F(\eta) + g'(x).u_0(x).\eta F'(\eta) \end{cases}$$

- پس :

$$\frac{\partial V_x}{\partial y}\Big|_{\text{روی سطح}} = 0$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{u_0(x)}{g(x)} F''(\eta)$$

$$\Rightarrow F_x = \mu u_0(x).\frac{F''(\eta)}{g(x)}\Big|_{\text{روی سطح}} = \mu\,\frac{u_0(x)}{g(x)}\cdot F''(\eta=0) \quad (1)$$

- قبلاً بدست آوردیم که :

$$\begin{cases} u_0(x) = Ax^m \\ g(x) = \sqrt{\dfrac{\gamma}{Am}}\ x^{\frac{1-m}{2}} \end{cases} \Rightarrow \frac{u_0(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{A^3 m}{\gamma}}\cdot x^{\frac{3m-1}{2}}$$

$$\xrightarrow{(1)} F_x = \mu\sqrt{\frac{A^3 m}{\gamma}}\cdot x^{\frac{3m-1}{2}}\cdot F''(\eta=0)$$

- داشتیم که :

$$\begin{cases} \gamma = \dfrac{\mu}{\rho}\cdot\dfrac{2m}{m+1} = \dfrac{\mu}{\rho}\beta \\ m = \lambda - 1 = \dfrac{\beta}{\beta-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{\gamma} = \dfrac{\rho}{\mu}\cdot\dfrac{1}{2-\beta} \\ \dfrac{3m-1}{2} = \dfrac{2\beta-1}{2-\beta} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(2)} F_x = \sqrt{\frac{\rho\mu A^3}{2-\beta}}\cdot x^{\frac{2\beta-1}{2-\beta}}\cdot F''(\eta=0)$$