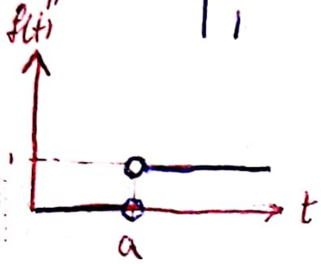
«فصل 01 تبدیل لاپلاس»

⓪ مقدمه

- تبدیل لاپلاس
  - تعریف ریاضی: $L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt$
  - معکوس قضیه: $L^{-1}[F(s)] = f(t)$

- تابع پله‌ای واحد $u(t-a)$ ، $u_a(t)$
  - تعریف ریاضی:
$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & t<a \\ 1 & t>a \end{cases}$$



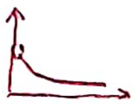
  - کاربردش اینه که تابع مورد بررسی رو فقط توی زمان‌هایی که با یا نیست درنظر بگیره
  - نکته مهم: $L[u(t) \cdot f(t)] = L[f(t)] = F(s)$

- تبدیل لاپلاس توابع چند ضابطه‌ای:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ f_1(t) & 0<t<a_1 \\ f_2(t) & a_1<t<a_2 \\ f_3(t) & a_2<t \end{cases}$$

$$f(t) = (f_1(t)-0) \cdot u(t-0) + (f_2(t)-f_1(t)) \cdot u(t-a_1) + (f_3(t)-f_2(t)) \cdot u(t-a_2)$$

① توابع اولیه

پله‌ای	A	$\longrightarrow$	$\frac{A}{s}$	
خطی (ramp)	$A \cdot t$	$\longrightarrow$	$\frac{A}{s^2}$	
سهمی	$A \cdot t^n$	$\longrightarrow$	$\frac{A \cdot n!}{s^{n+1}}$	
ضربان ایده‌آل (دلتای دیراک)	$A \cdot \delta(t)$	$\longrightarrow$	A	
نمایی	$A \cdot e^{-at}$	$\longrightarrow$	$\frac{A}{s+a}$	
سینوسی	$A \cdot \sin(wt)$	$\longrightarrow$	$A \cdot \frac{w}{s^2+w^2}$	
کسینوسی	$A \cdot \cos(wt)$	$\longrightarrow$	$A \cdot \frac{s}{s^2+w^2}$	
سینوسی هیپربولیک	$A \cdot \sinh(wt)$	$\longrightarrow$	$A \cdot \frac{w}{s^2-w^2}$	
کسینوس هیپربولیک	$A \cdot \cosh(wt)$	$\longrightarrow$	$A \cdot \frac{s}{s^2-w^2}$	

$A \cdot u(t-a) \rightarrow \frac{A}{s} \cdot e^{-as}$

$A t^n \cdot e^{-at} \rightarrow \frac{A n!}{(s+a)^{n+1}}$

$\frac{d}{dt}(u(t)) = \delta(t)$

$\delta(t-a) \rightarrow e^{-as}$

$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$

$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

تأخیر زمانی در حوزه‌ی s تابع $F(s) = -a$

② خواص تبدیل لاپلاس

- خواص انتقال

$$L[e^{-at}\cdot f(t)] = F(s+a)$$

$$L[u(t-a)\cdot f(t-a)] = e^{-as}\cdot F(s)$$

$$L[u(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s} \quad , \quad L[f(at)] = \frac{1}{a}\cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$L[t^n\cdot f(t)] = (-1)^n\cdot F^{(n)}(s) \quad , \quad L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_0^\infty F(s)\,ds$$

$$L\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} \quad , \quad L[f^{(n)}(t)] = s^n\cdot F(s) - s^{n-1}\cdot f(0) - s^{n-2}\cdot f'(0) - \cdots$$

$$L[f*g] = F(s)\cdot G(s) \quad , \quad f*g = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

- قضایای مقدار نهایی و اولیه

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot F(s)$$

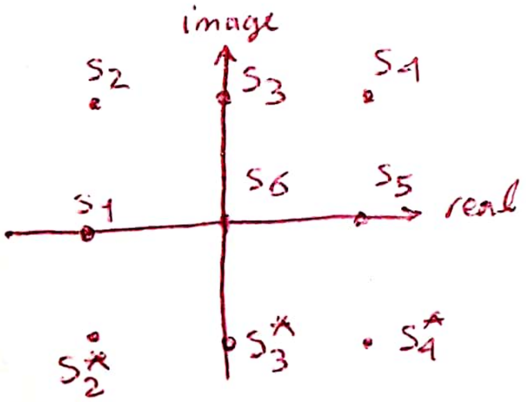
$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\cdot F(s)$$

③ بررسی کیفی تابع $f(t)$

- در مورد تبدیل معکوس کاربرد:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s+(a+bi)}\right] = e^{-(a+bi)t} = e^{-at}\cdot e^{-bit}$$

$$= e^{-at}(\cos bt - i\cdot\sin bt)$$



$S_1 \longrightarrow b=0$ ($a<0$)، نمایی میرا با زمان

$S_2, S_2^* \longrightarrow a<0$ ، نوسانی با دامنه کاهنده با زمان

$S_3, S_3^* \longrightarrow a=0$ ، 〃 دائم

$S_4, S_4^* \longrightarrow a>0$ ، 〃 با دامنه افزاینده با زمان

$S_5 \longrightarrow b=0$ ($a>0$)، نمایی میرا با زمان

$S_6 \longrightarrow a=b=0$ ، عدد ثابت

تابع $F(t)$ با تأخیر زمانی a = $F(s-a)$

«فصل 02 تحلیل و مدلسازی سیستم های کنترلی»

⓪ مقدمه

- تابع تبدیل فرآیند :

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{فرآیند}} \longrightarrow y(t) \equiv X(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$$

① سیستم های درجه اول

- حالت کلی :

بهره‌ی حالت یکنواخت

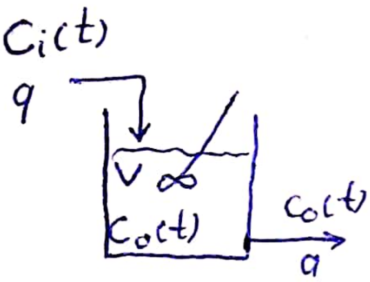
$$G(s)=\frac{K_p}{\tau s+1}$$

ثابت زمانی سیستم

- اگه ورودی و خروجی هم جنس باشن، معمولن: $K_p=1$

1-1 انواع پرکاربردش

1-1-1 مخزن اختلاط



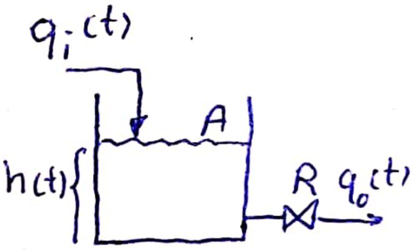
موازنه ناپایا : $q\cdot c_i(t)-q\cdot c_o(t)=\frac{d}{dt}(c_o(t)\cdot V)$

موازنه پایا : $q\cdot c_{is}-q\cdot c_{os}=V\cdot\frac{d}{dt}(c_{os})=0 \Rightarrow c_{is}=c_{os}$

متغیر انحرافی

$$\Rightarrow G(s)=\frac{C_o(s)}{C_i(s)}=\frac{1}{\tau s+1},\quad \tau=V/q$$

1-1-2 سطح مایع



موازنه ناپایا : $\dot m_i(t)-\dot m_o(t)=\frac{dm(t)}{dt}$

$$\Rightarrow \rho q_i(t)-\rho q_o(t)=\frac{d}{dt}(\rho A h(t))$$

$$\Rightarrow q_i(t)-q_o(t)=A\frac{dh(t)}{dt}$$

مقاومت خطی شیر

$$\Rightarrow G(s)=\frac{H(s)}{Q_i(s)}=\frac{R}{\tau s+1},\quad \tau=AR,\quad H(s)=R\cdot Q_o(s)$$

- اگه دوتا خروجی باشه :

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)}=\frac{K_p}{\tau s+1},\quad K_p=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2},\quad \tau=\frac{AR_1R_2}{R_1+R_2}$$

- اگه بجای شیر خروجی با مقاومت R، یه پمپ بذاریم که با دبی ثابت q_p مایع رو تخلیه کنه،

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)}=\frac{1}{\tau s},\quad \tau=A$$

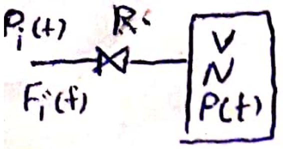
1-1-3 دماسنج جیوه ای

موازنه ناپایا : $q_{in}-q_{out}=\frac{d}{dt}(mcT(t)) \Rightarrow hA(T_f(t)-T(t))=mc\frac{dT(t)}{dt}$

موازنه پایا : $T_s=T_{fs}$

$$\Rightarrow G(s)=\frac{T'(s)}{\underbrace{T'_f(s)}_{\text{محیط خارجی}}}=\frac{1}{\tau s+1},\quad \tau=\frac{mc}{hA}$$

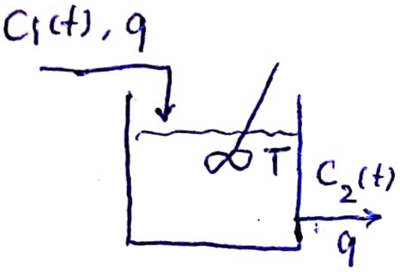
1-1-4 فشار



موازنه‌ی ناپایا:
$$F_i(t) - 0 = \frac{dN(t)}{dt} \Rightarrow \frac{P_i(t) - P(t)}{R} = \frac{V \cdot dP(t)}{R_g T \cdot dt}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{P'(s)}{P_i'(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad , \quad \tau = \frac{RV}{R_g T}$$

1-1-5 راکتور CSTR با واکنش $A \rightarrow B$ $(-r_A = kC_A)$

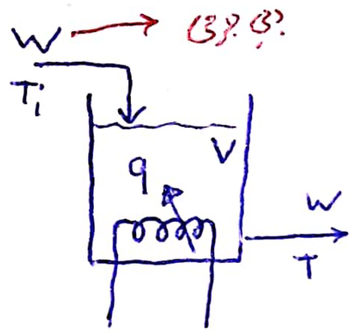


موازنه‌ی ناپایا:
$$q \cdot C_1(t) - q \cdot C_2(t) - kVC_2(t) = \frac{d}{dt}(C_2(t) \cdot V)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{C_2(s)}{C_1(s)} = \frac{K_p}{\tau s + 1} \quad , \quad K_p = \frac{q}{q + kV} \quad , \quad \tau = \frac{V}{q + kV}$$

$$\frac{q}{\cancel{k}\, q + Vs + V}$$ (اشتباه تایپی)

1-1-6 مخزن گرم کن



$$T'(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \cdot T_i'(s) + \frac{1/WC}{\tau s + 1} \cdot Q(s) \quad , \quad \tau = \frac{\rho V}{W}$$

1-2 خطی سازی

- براساس رابطه‌ی روبرو:

$$F(x) \approx F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$$

- حالات پرکاربرد

$$C\sqrt{h(t)} \approx C\sqrt{h_s} + \frac{C}{2\sqrt{h_s}}(h(t) - h_s)$$

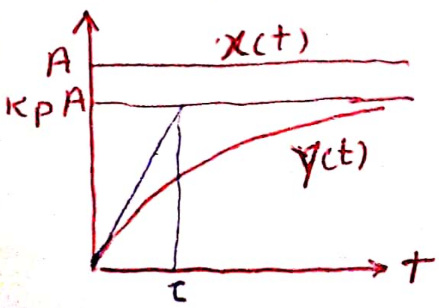
$$\frac{c(t)}{1 + c(t)} \approx \frac{C_s}{1 + C_s} + \frac{1}{(1 + C_s)^2}(c(t) - C_s)$$

1-3 پاسخ‌های مختلف

1-3-1 پاسخ ورودی پله‌ای

$$x(t) = A \cdot u(t) \longrightarrow L[x(t)] = X(s) = \frac{A}{s}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_p}{\tau s + 1} \Rightarrow Y(s) = \frac{AK_p}{s(\tau s + 1)} \Rightarrow y(t) = AK_p(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



- مقدار ثابت زمانی از روی شکل:

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{AK_p}{\tau}$$

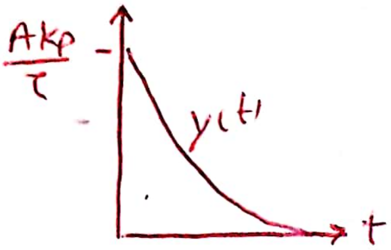
- بعد از گذشت یک ثابت زمانی $(t = \tau)$ پاسخ به ٪63 مقدار نهایی می‌رسد:

$$y(\tau) = 0.63\, AK_p$$

1-3-2 پاسخ ورودی ضربان ایده‌آل

$$x(t)=A.\delta(t) \Rightarrow X(s)=A \quad , \quad G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{K_p}{\tau s+1}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{AK_p}{\tau s+1} \Rightarrow y(t)=\frac{AK_p}{\tau}.e^{-t/\tau}$$

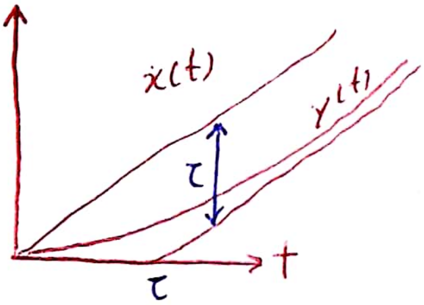


- مقدار نهایی پاسخ توی $t\to\infty$ میشه صفر

- پاسخ ورودی ضربان ایده‌آن با پاسخ پله‌ای به هم مربوطن :

$$y(t)\Big|_{\text{ضربان ایده‌آل}}=\frac{dy(t)}{dt}\Big|_{\text{پله‌ای}} \quad , \quad Y(s)\Big|_{\text{ضربان ایده‌آل}}=s.Y(s)\Big|_{\text{پله‌ای}}$$

1-3-3 پاسخ ورودی خطی



$$x(t)=At.u(t) \Rightarrow X(s)=\frac{A}{s^2}$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{K_p}{\tau s+1} \Rightarrow Y(s)=\frac{AK_p}{s^2(\tau s+1)}$$

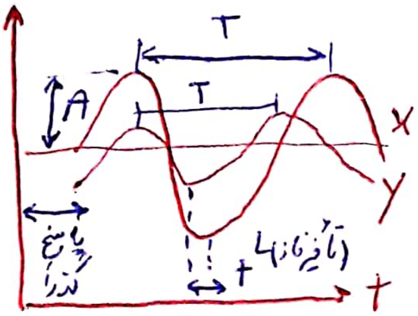
$$\Rightarrow y(t)=AK_p(t-\tau+\tau.e^{-t/\tau})$$

1-3-4 پاسخ ورودی سینوسی

$$x(t)=A.\sin(\omega t) \Rightarrow X(s)=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2} \quad , \quad G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{K_p}{\tau s+1}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}.\frac{K_p}{\tau s+1} \Rightarrow y(t)=\frac{AK_p\omega\tau}{1+(\tau\omega)^2}.e^{-t/\tau}+\frac{AK_p}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}.\sin(\omega t+\arctan(-\tau\omega))$$

$$\Rightarrow \text{پاسخ حالت پایدار}=y(t)\Big|_{t\to\infty}=\frac{AK_p}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}.\sin(\omega t+\arctan(-\tau\omega))$$



- پاسخ ورودی ← هم فرکانسن
← اختلاف فاز دارن ← $\arctan(-\tau\omega)$

توی $\omega\to\infty$ میشه $-\frac{\pi}{2}^{rad}=-90^\circ$

- نسبت دامنه‌ی موج خروجی به ورودی : (Amplitude Ratio) (AR<1)

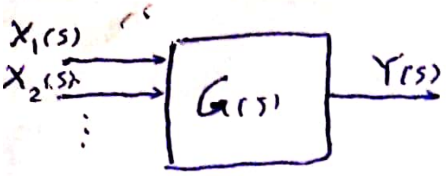
$$AR=\frac{\frac{A}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}}{A}=\frac{1}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}$$

- واسه‌ی تبدیل مقدار تأخیر فاز :

برحسب ثانیه $t^L=\frac{|\phi|}{\omega}$ برحسب رادیان

$$\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$$

1-3-5 پاسخ، چندتا ورودی



$$Y(s)=G(s).X(s)=G(s).(X_1(s)+X_2(s)+\cdots)$$

② سیستم های درجه دوم

حالت کلی

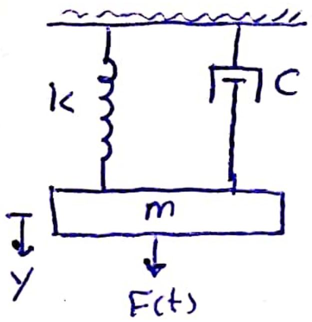
بهره‌ی حالت یکنواخت (بهره‌ی استاتیک سیستم)

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{k_p}{\tau^2 s^2+2\xi\tau s+1}$$

τ : زمان تناوب طبیعی نوسانات سیستم $(\tau>0)$

ξ : ضریب میرایی (Damping factor) $(\xi\geq 0)$

_ مثال فیزیکی: سیستم فنر - وزنه - ضربه گیر:



$$G(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{1/k}{\frac{m}{g_c k}.s^2+\frac{c}{k}.s+1},\quad \tau=\sqrt{\frac{m}{g_c k}},\quad \xi=\sqrt{\frac{g_c.c^2}{4mk}}$$

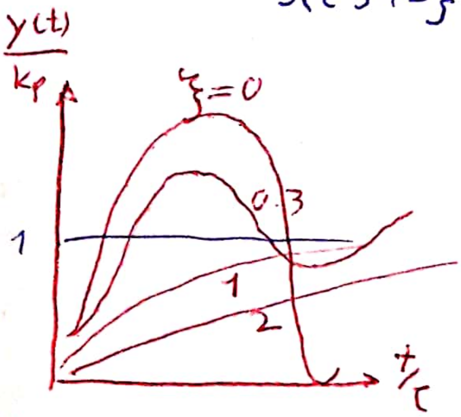
_ اگه ضربه‌گیر نباشه $(c=0)$ ← دچار نوسان دائم $(\xi=0)$

_ هرچی $\xi\uparrow$ ← میزان نوسانات سیستم کم میشه

2-1 پاسخ، ورودی پله ای

$$x(t)=A.u(t)\Rightarrow X(s)=\frac{A}{s},\quad G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{k_p}{\tau^2 s^2+2\xi\tau s+1}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{Ak_p}{s(\tau^2 s^2+2\xi\tau s+1)}=\frac{Ak_p}{s(s-s_1)(s-s_2)}:\quad s_1,s_2=-\frac{\xi}{\tau}\pm\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\tau}$$



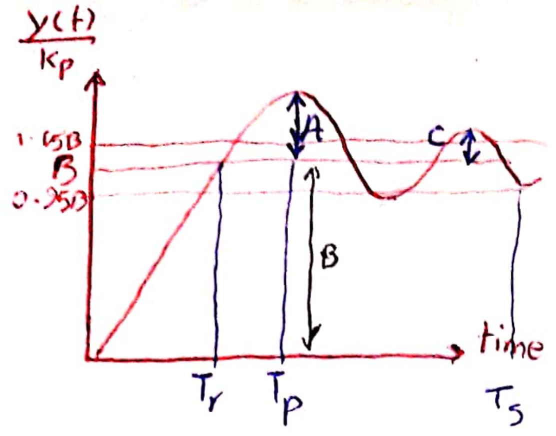
_ اگه $\xi>1$ ← هر دو ریشه حقیقی و سمت چپ محور موهومی
← پاسخ غیرنوسانی دیر میراست (Over Damped)

_ اگه $\xi=1$ ← دو ریشه‌ی حقیقی و مضاعف سمت چپ محور موهومی
← پاسخ غیرنوسانی میرای بحرانیه (Critically Damped)
← سریع ترین پاسخ غیرنوسانیه

$$y(t)=Ak_p(1-(1+\frac{t}{\tau}).e^{-t/\tau})$$

_ اگه $0<\xi<1$ ← هر دو ریشه مختلط و سمت چپ محور موهومی
← پاسخ، سیستم نوسانی و کم میراست (Under Damped)

_ اگه $\xi=0$ ← دو ریشه‌ی مختلط محض داره (روی محور موهومی)
← سیستم نوسانی دائم

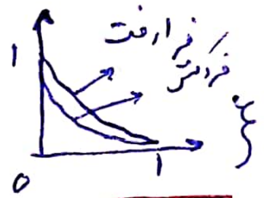


2-2 مفاهیمِ مرتبط با حالتِ نوسانی(کم میرا) توی پاسخِ پله‌ای $(0<\xi<1)$

- نسبتِ فرارفت (Overshoot)
  - یعنی بیشترین انحراف از مقدارِ نهاییِ پاسخ (که توی اولین پیک max دیده می‌شه)
  - رابطه‌ش: $O.S. = \frac{A}{B} = \exp\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$
  - حالات حدی
    - $\xi \to 1 : \quad O.S. \to 0$
    - $\xi \to 0 : \quad O.S. \to 1$

- زمان‌های پی در پی‌ای که پاسخِ سیستم، max و min می‌شه: $t = \frac{n\pi\tau}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad , n = 1, 2, 3, \dots$

- زمانِ پیک (T_p)، زمانیه که پاسخ به اولین max می‌رسه: $\underline{n=1} : \quad t = \frac{\pi\tau}{\sqrt{1-\xi^2}}$



- نسبتِ فروکش (Decay Ratio)
  - یا کاهشِ دامنه‌ی نوسانات
  - سرعتِ پاسخ رو توی رسیدن به مقدارِ نهایی نشون می‌ده
  - رابطه: $D.R. = \frac{C}{A} = \exp\left(\frac{-2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$
  - $D.R. = (O.S.)^2$

$$f = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{2\pi\tau}$$

$$\left(\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}\right)$$

- دوره تناوبِ نوسان
  - سرعتِ زاویه‌ای (فرکانسِ زاویه‌ای): $\omega = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau}$
  - با گذشتِ زمان، دامنه‌ی نوساناتِ پاسخ کم می‌شه و T همواره ثابته
  - توحالتِ $\xi = 0$ — $\omega = [\frac{rad}{s}]$
    - نوسانِ دائم با دامنه‌ی ثابت داریم (مقادیرِ این حالت طبیعی‌ان)
    - فرکانسِ زاویه‌ایِ طبیعی: $\omega_n = 1/\tau$
    - فرکانسِ طبیعیِ نوسان: $f_n = 1/2\pi\tau$
  - یه راهِ دیگه واسه‌ی تابعِ انتقالِ سیستمِ درجه 2: $G(s) = \frac{K_p}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} = \frac{K_p\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

$$\frac{f}{f_n} = \sqrt{1-\xi^2} = \frac{T_n}{T}$$

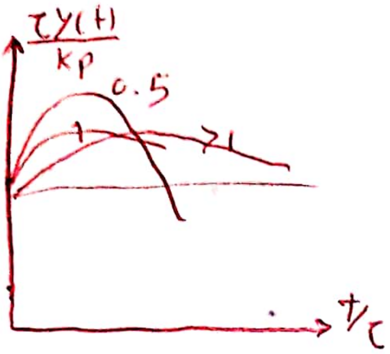
- زمانِ پاسخ (Respond Time)
  - زمانِ رسیدنِ پاسخ با اختلافِ $\pm\%5$ از مقدارِ نهایی و موندن توی این حدود: $T_s = \frac{3\tau}{\xi}$
  - ______ $\pm\%2$ ______ : $T_s = \frac{4\tau}{\xi}$

- زمانِ خیز (Rise Time)
  - زمانی که پاسخ سیستم واسه‌ی اولین بار به مقدارِ نهایی می‌رسه
  - رابطه: $T_r = \left[\pi - \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right]\frac{\tau}{\sqrt{1-\xi^2}}$

- بهره: $K_p = \frac{Y_{\text{مقدارِ نهایی}} - Y_{\text{مقدارِ اولیه}}}{X_{\text{مقدارِ نهایی}} - X_{\text{مقدارِ اولیه}}}$

$\boxed{2-3}$ پاسخ ورودی ضربان ایده‌آل

$$x(t) = A \cdot \delta(t) \Rightarrow X(s) = A \Rightarrow Y(s) = \frac{A k_p}{\tau^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1}$$



- برحسب مقدار ξ:
  - اگه $\xi > 1$: پاسخ بر میراست
  - اگه $\xi = 1$: پاسخ میرای بحرانیه
    $y(t) = A k_p \left(\frac{1}{\tau^2} t \cdot e^{-t/\tau}\right)$
  - اگه $0 < \xi < 1$: پاسخ کم میرا و نوسانیه

- بجز حالت $\xi = 0$ ، توی بقیه‌ی حالتا، مقدار نهایی پاسخ به صفر برمی‌گرده

- شیبِ منحنیِ $\frac{\tau y(t)}{A k_p}$ برحسبِ $\frac{t}{\tau}$ توی لحظه‌ی صفر برای جمیع مقادیر ξ می‌شه یک

$\boxed{2-4}$ پاسخ ورودی سینوسی

$$x(t) = A\sin(\omega t) \Rightarrow X(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \Rightarrow Y(s) = \frac{A\omega}{s^2+\omega^2} \cdot \frac{k_p}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}$$

$$\Rightarrow y(t) = c_1 \cdot \cos(\omega t) + c_2 \cdot \sin(\omega t) + e^{-\xi \frac{t}{\tau}} \left(c_3 \cos\left(\sqrt{1-\xi^2} \cdot \frac{t}{\tau}\right) + c_4 \cdot \sin\left(\sqrt{1-\xi^2} \cdot \frac{t}{\tau}\right)\right)$$

$$\Rightarrow y(t)\Big|_{t \to \infty} = \frac{A}{\sqrt{(1-(\tau\omega)^2)^2 + (2\xi\tau\omega)^2}} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

با تابع ورودی هم فرکانسه

$$AR = \frac{1}{\sqrt{(1-(\tau\omega)^2)^2 + (2\xi\tau\omega)^2}}$$

- نسبتِ دامنه‌ی نوسانِ خروجی به ورودی
  - همیشه کوچیکتر از یک نیست و به مقدار ξ و τ و ω بستگی داره
  - ولی اگه $\xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$: $AR < 1$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-2\xi\tau\omega}{1-(\tau\omega)^2}\right)$$

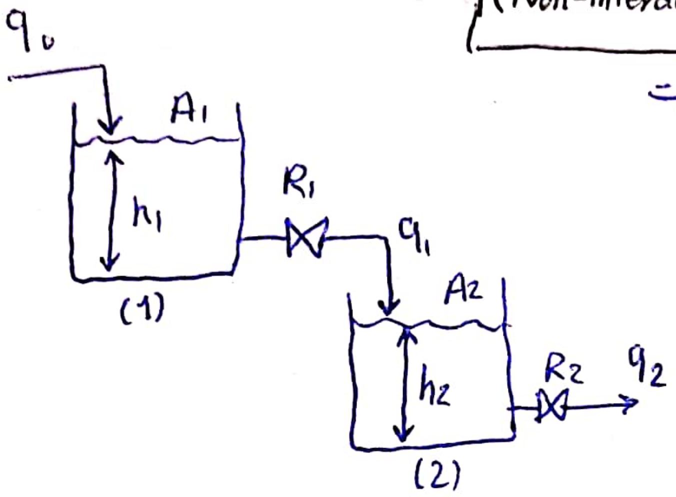
- اختلافِ فازِ خروجی با ورودی

$$\varphi_{max} = -180^\circ = -\pi \ rad$$

مقدار حداکثرش توی $t \to \infty$ ،

③ سیستم های درجه اول متوالی

3-1 سیستم های غیرتداخلی یا بدون اثر متقابل (Non-interacting)



- سیستم جلو غیرتداخلیه، چون q_1 تابعی از h_2 یا q_2 نیست

$$G_1(s)=\frac{Q_1(s)}{Q_0(s)}=\frac{1}{\tau_1 s+1} \quad , \quad \tau_1=A_1R_1$$

$$G_2(s)=\frac{Q_2(s)}{Q_1(s)}=\frac{1}{\tau_2 s+1} \quad , \quad \tau_2=A_2R_2$$

$$\frac{Q_2(s)}{Q_0(s)}=\frac{Q_1(s)}{Q_0(s)}\times\frac{Q_2(s)}{Q_1(s)} \Longrightarrow G(s)=G_1(s)\times G_2(s)$$

$$\Longrightarrow \frac{Q_2(s)}{Q_1(s)}=\frac{1}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}=\frac{1}{\tau_1\tau_2 s^2+(\tau_1+\tau_2)s+1} \quad , \quad \frac{H_2(s)}{Q_0(s)}=\frac{R_2}{\tau_1\tau_2 s^2+(\tau_1+\tau_2)s+1}$$

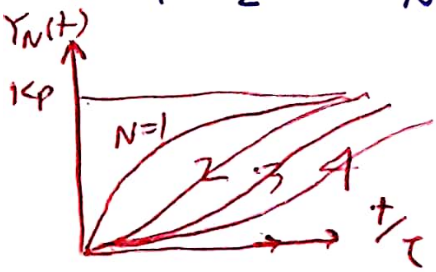
- با توجه به اینکه ریشه های مخرج تابع انتقال کلی‌ش همیشه حقیقی‌ان، پاسخ این سیستم ها واسه ی ورودی پله‌ای یا ضربان ایده‌آل، همیشه به صورت پرمیرا ($\tau_1 \neq \tau_2$) یا میرای بحرانیه ($\tau_1=\tau_2$ ← سریع‌ترین پاسخ) ($\zeta \geq 1$) - یعنی هیچوقت نوسانی نمی‌شه

- واسه N تا سیستم متوالی:

$$X(s) \rightarrow \boxed{G_1(s)} \xrightarrow{Y_1(s)} \boxed{G_2(s)} \xrightarrow{Y_2(s)} \cdots \xrightarrow{Y_{N-1}(s)} \boxed{G_N(s)} \xrightarrow{Y_N(s)}$$

$$G(s)=\frac{Y_N(s)}{X(s)}=G_1(s)\times G_2(s)\times\cdots\times G_N(s)=\frac{K_p}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_N s+1)}$$

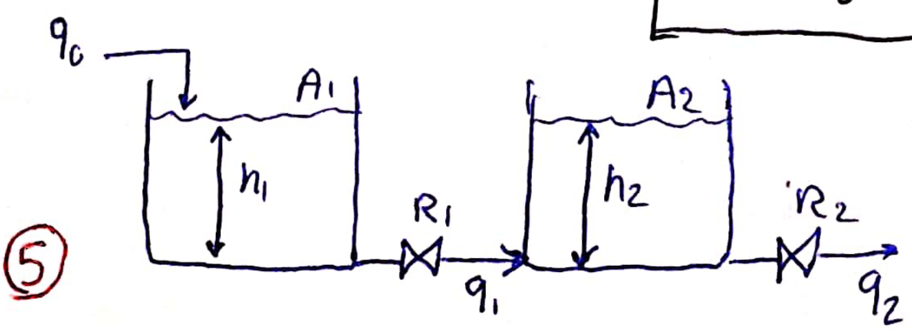
$$\text{if } \tau_1=\tau_2=\cdots=\tau_N=\tau \Longrightarrow \frac{Y_N(s)}{X(s)}=\frac{K_p}{(\tau s+1)^N}$$



به ازای ورودی پله‌ای

- واسه $N=1$، شدت تغییرات پاسخ توی $t=0$، max ـه
- واسه $N \geq 2$، منحنی به شکل S درمیاد

3-2 سیستم های تداخلی یا با اثر متقابل (Interacting)



$$Q_1(t)=\frac{H_1(t)-H_2(t)}{R_1}$$

$$Q_2(t)=\frac{H_2(t)}{R_2}$$

مخزن اول : $Q_0(t) - Q_1(t) = A\dfrac{dH_1(t)}{dt}$

مخزن دوم : $Q_1(t) - Q_2(t) = A\dfrac{dH_2(t)}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{Q_2(s)}{Q_0(s)} = \frac{1}{\tau_1\tau_2 s^2 + (\tau_1+\tau_2+A_1R_2)s + 1}$$

$\tau_1 = A_1R_1$

$\tau_2 = A_2R_2$

تداخلی : همواره میرا ($\xi > 1$)

3-3 مقایسه‌شون

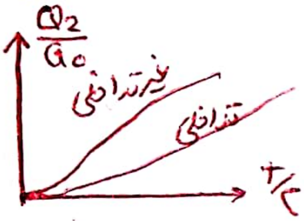
ـ توی حالت $R_1 = R_2 = R$, $A_1 = A_2 = A$

غیر تداخلی :

$$\frac{Q_2(s)}{Q_0(s)} = \frac{1}{\tau^2s^2+2\tau s+1} = \frac{1}{(\tau s+1)(\tau s+1)}$$

تداخلی :

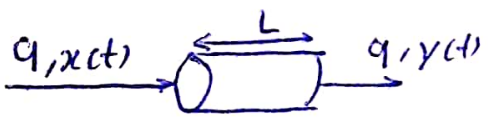
$$\frac{Q_2(s)}{Q_0(s)} = \frac{1}{\tau^2s^2+3\tau s+1} = \frac{1}{(0.38\tau s+1)(2.62\tau s+1)}$$



ـ تداخلی بودن سیستم، پاسخ رو کندتری کنه

ـ $\xi_{تداخلی} > \xi_{غیرتداخلی} \geqslant 1$

④ تأخیر یا پسی انتقال توی سیستم های کنترل



ـ حضور ترم تأخیر زمانی، نمودار پاسخ رو به اندازه‌ی τ_d به سمت راست می‌بره

$y(t) = x(t-\tau_d)$, $\tau_d = \dfrac{\text{حجم لوله}}{\text{شدت جریان حجمی}} = \dfrac{AL}{q} = \dfrac{V}{V_0} \Rightarrow G(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)} = e^{-\tau_d s}$

ـ واسه‌ی تقریب زدنش :

• $e^{-\tau_d s} \simeq \dfrac{1}{1+\tau_d s}$

• $e^{-\tau_d s} \simeq 1 - \tau_d s$

Pade 1st • $e^{-\tau_d s} \simeq \dfrac{1-\frac{\tau_d s}{2}}{1+\frac{\tau_d s}{2}} = \dfrac{2-\tau_d s}{2+\tau_d s}$

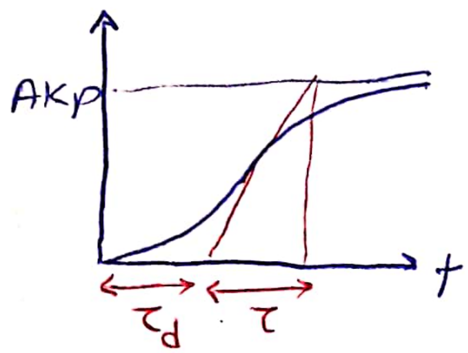
Pade 2nd • $e^{-\tau_d s} \simeq \dfrac{\tau_d^2 s^2 - 6\tau_d s + 12}{\tau_d^2 s^2 + 6\tau_d s + 12}$

← واسه‌ی محاسبه‌ی پاسخ سیستم با تأخیر، اول بی‌خیالِ ترم تأخیر ($e^{-\tau_d s}$) می‌شیم و پاسخ رو درمیاریم

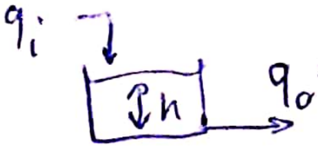
و بعد : $t \to t-\tau_D$ (هم توی رابطه هم توی $u(t)$)

⑤ سیستم های درجه بالاتر

ـ کلک رشتی ← شبیه‌سازی‌ش با یه سیستم درجه اول با ترم تأخیر



$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_p \cdot e^{-\tau_d s}}{\tau s+1}$$



$q_0 = h^{\frac{1}{n}} \rightarrow G(s) = \dfrac{1}{\tau s+1}$

$\tau = n h_s^{\frac{n-1}{n}}$

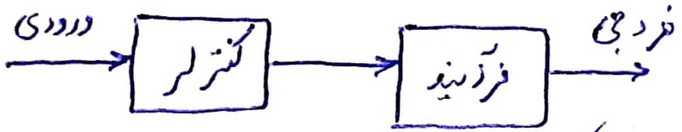
«فصل 03 سیستم های کنترلی و اجزاشون»

⓪ مقدمه

- هدف فصل ← بررسی یه سیستم کنترل کامل

① انواع سیستم های کنترلی

1-1 سیستم های کنترل مدار باز (Open Loop)

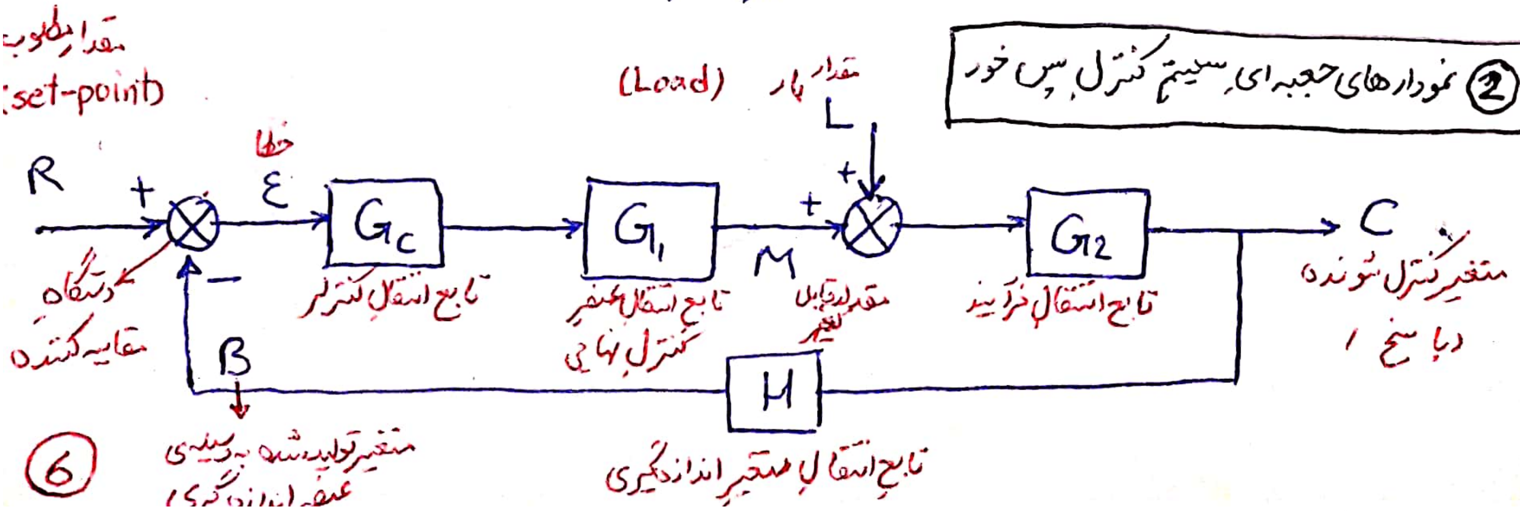


- توش متغیر خروجی با تغییر متغیر ورودی تغییری کنه ولی امکان تنظیم مجددش نیست
- تابع انتقال بین ورودی و خروجی هم میشه حاصلضرب توابع انتقال کنترلر و فرآیند

1-2 سیستم های کنترل مدار بسته (Closed Loop) [Feedback systems]

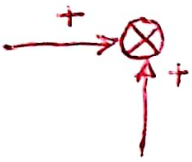
- خودشون دو دسته ن
  - ← پس خور منفی: متغیر خروجی با تغییر متغیر ورودی تغییری کنه و با برگشت اطلاعات لحظه ای خروجی به سمت ورودی، امکان اصلاح مقدار متغیر خروجی و رسوندنش به حد مطلوب هست
  - ← پس خور مثبت: توش بتدریج خطا زیاد میشه و بخودی خود ناپایداره و امکان کنترل توش از بین میره.
- توی یه سیستم کنترل مدار بسته
  - ← متغیر خروجی: کنترل شونده
  - ← ورودی: میزان مطلوب (مقرر)
- مراحل یه سیستم پس خور منفی به طور کلی
  - ← اندازه گیری یک یا چند کمیت در فرآیند
  - ← تغییر و تنظیم ورودی های سیستم
  - ← انتقال علائم و فرمان های کنترلی

② نمودارهای جعبه ای سیستم کنترل پس خور



- اونی که متغیرهاش انحرافی‌ان و ورودی هم اونایی که توی جعبه‌ان، تابع انتقال
- مسیر پیشرفت: مجموعه‌ی مابین مقایسه‌کننده و متغیر کنترل شونده (شامل G_c، G_1، G_2)
- مسیر پسخور: شامل جعبه‌ی H (در بین متغیر کنترل شونده و مقایسه‌کننده)
- انواع پس‌خور
  - منفی
    - علامت ورودی به مقایسه‌کننده منفیه
    - سیستم تمایل به کاهش خطا داره
  - مثبت
    - علامت ورودی به مقایسه‌کننده مثبته
    - ناپایداره
    - بجای مسیر پیشرفت، می‌گیم مسیر پیش رو

$$\varepsilon = R - B$$



$$\varepsilon = R + B$$

③ بررسی کیفی اجزای یه سیستم کنترل مداربسته

3-1 اندازه‌گیر — Measuring Element

- وظیفه‌ش اندازه‌گیری کمیت و ارسال مقدار محاسبه شده به کنترلره
- مثل دماسنج

3-2 مبدل‌ها و انتقال دهنده‌ها — Transducers & Transmissers

- مبدل، کمیتی رو که اندازه‌گیری شده، به علائمی (مثل فشار یا میلی ولت) تبدیل می‌کنن که بشه مستقیمن به کنترلر فرستادشون
- انتقال دهنده‌ها هم اون علائم رو انتقال می‌دن (معمولن هم ترم تأخیر ($e^{-t_d s}$) دارن)

3-3 جزء نهایی کنترل — Final Control Element

- معمولن شیرهای کنترلن که فرمان رو از کنترلر می‌گیرن و پیاده می‌کنن
- تابع انتقالشون می‌تونه درجه یک یا یه عدد ثابت باشه
- انواعش
  - بادی (Pneumatic)
    - بازه‌ی فشار سر شیر توشون: $3-15$ psi
    - انواعش
      - air-to-open: با افزایش فشار، شیر باز می‌شه
      - air-to-close: " " " " بسته "
  - الکتریکی
    - بازه‌ی جریان سر شیر: $4-20$ mA

3-4 کنترلر

- وظیفه‌ش حفظ یه کمیت توی یه حد معین و مشخصه
- دو مدل بادی یا الکتریکی دارن ولی انواعشون به شرح زیره

3-4-1 کنترلر تناسبی (P)

- علامت خطا رو می‌گیرن و متناسب باهاش علامتی به جزء نهایی کنترل می‌فرستن

علامت فشار خروجی ازش — بهره تناسب (حساسیت) — خطا — فشار در حالت پایا

$$p(t) = \underbrace{K_c}_{\text{بهره تناسب (حساسیت)}} \cdot \varepsilon(t) + P_s$$

$$P(t) = p(t) - P_s$$

متغیر انحرافی

$$\Rightarrow \frac{P(s)}{\varepsilon(s)} = K_c$$

- اگه K_c خیلی زیاد باشه (حساسیت کنترلر بالا باشه)، کنترلر به صورت قطع و وصلی (on/off) کار می‌کنه

- پهنه‌ی تناسبی (Proportional Bond): $\left(PB \propto \frac{1}{K_c}\right)$

$$\% PB = \frac{\Delta\varepsilon}{\text{Range}} \times 100$$

Range ← محدوده‌ی کاری کنترلر

- یه تعریف دیگه واسه بهره ← کنترلر بادی:

$$K_c = \frac{(15-3)^{psi}}{\Delta\varepsilon} = \frac{12}{\Delta\varepsilon}$$

← " الکتریکی:

$$K_c = \frac{(20-4)^{mA}}{\Delta\varepsilon} = \frac{16}{\Delta\varepsilon}$$

3-4-2 کنترلر تناسبی - انتگرالی (PI)

$$p(t) = K_c \cdot \varepsilon(t) + \frac{K_c}{\tau_I} \int_0^t \varepsilon(t)\,dt + P_s$$

τ_I ← زمان انتگرالی

$$\Rightarrow \frac{P(s)}{\varepsilon(s)} = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right)$$

3-4-3 کنترلر تناسبی - مشتق (PD)

$$p(t) = K_c \cdot \varepsilon(t) + K_c \tau_D \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + P_s$$

τ_D ← زمان مشتق

$$\Rightarrow \frac{P(s)}{\varepsilon(s)} = K_c(1 + \tau_D s)$$

3-4-4 کنترلر تناسبی - مشتق - انتگرالی (PID)

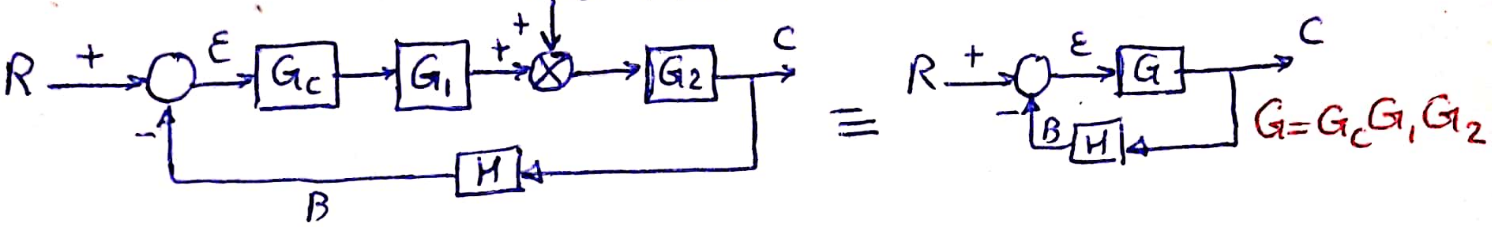
$$p(t) = K_c \cdot \varepsilon(t) + K_c \tau_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \frac{K_c}{\tau_I} \int_0^t \varepsilon(t)\,dt + P_s$$

$$\Rightarrow \frac{P(s)}{\varepsilon(s)} = K_c\left(1 + \tau_D s + \frac{1}{\tau_I s}\right)$$

④ تابع انتقال سیستم مداربسته

4-1 حالت سروو (Servo)

- توی این حالت $L = 0$ و R تغییر می‌کند و دنبال $\frac{C(s)}{R(s)}$ هستیم



$$\varepsilon = R - B,\quad C = \varepsilon G = (R-B)G,\quad B = HC,\quad C = (R-HC)G$$

پس خور منفی :

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH}$$

تابع انتقال مدار بسته

تابع انتقال مدار باز

$1 + GH = 0 \rightarrow$ معادله مشخصه

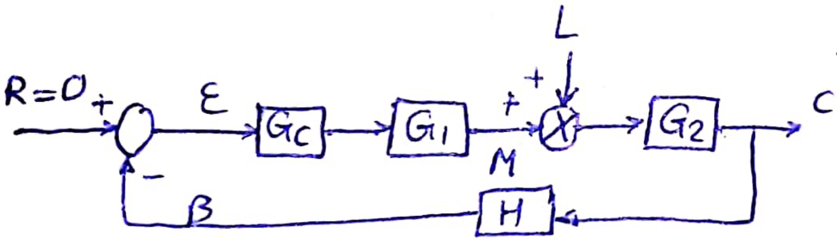
$$R \longrightarrow \boxed{\frac{G}{1+GH}} \longrightarrow C$$

پس خور مثبت :

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1-GH}$$

$$R \longrightarrow \boxed{\frac{G}{1-GH}} \longrightarrow C$$

4-2 حالت تنظیم کننده (Regulator)



$$(L+M)\cdot G_2 = C,\quad M = \varepsilon G_c G_1$$

$$0 - B = \varepsilon,\quad B = CH$$

$$C = G_2(L + \varepsilon G_c G_1) = G_2(L + (-CH)G_c G_1)$$

پس خور منفی :

$$\frac{C}{L} = \frac{G_2}{1+GH}$$

$$L \longrightarrow \boxed{\frac{G_2}{1+GH}} \longrightarrow C$$

پس خور مثبت ،

$$\frac{C}{L} = \frac{G_2}{1-GH}$$

$$L \longrightarrow \boxed{\frac{G_2}{1-GH}} \longrightarrow C$$

4-3 چند نکته

- صرف نظر از جهت متغیر انتخابی، مخرج کسر تابع انتقال همواره ثابته
- تابع انتقال مدار باز، به حاصلضرب تمام توابع انتقالِ حلقه‌ی اصلی می‌گن، یعنی GH

- اگه مخرج کسر رو مساوی صفر بذاریم، به معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم مدار بسته می‌رسیم

- ریشه‌های معادله‌ی مشخصه، شکل کلی پاسخ $c(t)$ رو به هر تابع محرک ($R(t)$ یا $L(t)$) تعیین می‌کنن

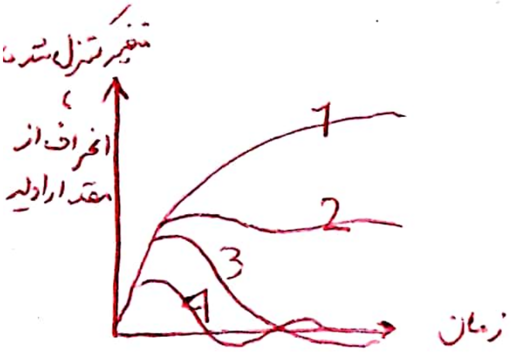
- اگه هم توی L و هم توی R تغییر داشتیم:

$$C = \left(\frac{G}{1 \pm GH}\right) R + \left(\frac{G_2}{1 \pm GH}\right) L$$

- فرضیات
  - اگه هیچ نگفتن، حالت servo داریم
  - اگه مقدار H رو ندادن، یک در نظر بگیر

- ثابت زمانی مدار بسته، کمتر از ثابت زمانی فرآینده

⑤ افت کنترل و اثر افزودن کنترلرها به سیستم



1: بدون کنترل
2: P
3: PI
4: PID

- افت کنترل (off-set)
  - یعنی اختلاف بین مقدار حالت یکنواخت جدید نهایی $c(t)$ و مقدار نهایی $R(t)$
  - رابطه‌ی اصلی:

$$\text{off-set} = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \to \infty} (R(t) - c(t)) = \lim_{s \to 0} s(R(s) - C(s))$$

  - اگه تابع انتقال $\frac{C}{R}$ رو داشتیم:

$$\text{off-set} = \lim_{s \to 0} s \cdot R(s) \left(1 - \frac{C(s)}{R(s)}\right)$$

  - ~ ~ ~ $\frac{C}{L}$ ~ ~ ~ :

$$\text{off-set} = \lim_{s \to 0} s\left(R(s) - L(s) \times \frac{C(s)}{L(s)}\right)$$

5-1 اثر حضور کنترلر تناسبی

- سیستم می‌تونه که افزایش $c(t)$ رو تا حدی متوقف کنه و اونو توی یه حالت یکنواخت جدیدی بین مقدار اولیه و مقدار بدون کنترلر نگه داره

- هرچی $K_c \uparrow$
  - سرعت رسیدن به پاسخ زیاد می‌شه
  - افت کنترل کم می‌شه
  - اگه خیلی بره بالا، نوسانی‌تر می‌شه سیستم (و بعضاً ناپایدار)

5-2 اثر اضافه کردن عامل انتگرالی $\left(\frac{1}{\tau_I s}\right)$

- افت کنترل رو واسه‌ی تغییر پله‌ای توی مقدار مطلوب حذف می‌کنه
- از معایبش اینه که رفتار پاسخ رو نوسانی می‌کنه
- افزایش τ_I باعث کندی پاسخ می‌شه

5-3 اثر اضافه کردن عامل مشتق

- اثرش
  - افزایش سرعت پاسخ
  - بهبود نسبی پایداری سیستم
  - کاهش نوسانات پاسخ
- مقادیر زیاد τ_D
  - می‌تونه پاسخ سیستم رو نوسانی‌تر کنه
  - البته اگه τ_D خیلی کم باشه دما زیادش کنیم

حداکثر انحراف و زمان پاسخ کم میشه

- عمل مشتق توی کنترلر می‌تونه خطای تحریک کننده رو پیش‌بینی و تصحیح کنه

5-9 انتخاب کنترلر مناسب واسه‌ی فرآیندهای مختلف

- کنترل جریان
  - معمولا PI با بهره‌ی کم
  - اگه τ_D رو کم انتخاب کنیم، سرعت پاسخ رو واسه‌ی رسیدن به مقدار مقررش زیاد می‌کنیم
- کنترل سطح مایع
  - P جوابه (چون معمولا کنترل دقیق نمی‌خوایم و اگه توی یه رنج نگه داره بسه)
  - PI اگه کنترل دقیق بخوایم
- کنترل فشار
  - PI (واسه سیستم‌هایی سریعی که دقت لازم دارن)
  - P (" " آروم و آهسته)
- کنترل دما
  - معمولا سیستم‌های کندی هستن
  - PID
    - با بهره‌ی بالا
    - τ_I در حدود ثابت زمانی فرآیند (یعنی هرچی سرعت فرآیند بره بالا، τ_I هم کم میشه)
    - τ_D در حدود $\frac{1}{4}$ ثابت زمانی فرآیند

«فصل 09 پایداری»

① مفهوم پایداری

- سیستم پایدار ← واسه‌ی همه‌ی ورودی های محدود به سیستم، پاسخ خروجی محدودی توی همه‌ی زمان ها داره ← مثلاً پله‌ای و سینوسی

- سیستم های درجه 1 و 2 ذاتاً پایدارن

② معیار پایداری

- پاسخ یه سیستم در حالت کلی ← توی حوزه‌ی زمان: $t^P e^{(\alpha+\beta j)t}$

← " " لاپلاس: $\dfrac{1}{(s-(\alpha+\beta j))^P}$

- توی یه سیستم پایدار: $\alpha<0$ (یعنی ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم، توی سمت چپ محور حقیقیه)

- روش های تعیین پایداری ← آزمون روث
← مکان هندسی ریشه ها

③ آزمون روث

- اول باید معادله مشخصه‌ی سیستم رو دربیاریم:

$$1+G(s)\cdot H(s)=a_0 s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

- a_0 باید مثبت باشه (اگه نبود: دو طرف معادله × (1-))

- اگه حتی یکی از ضرایب a_i منفی بود، سیستم همیشه ناپایداره

- اگه همه‌ی ضرایب مثبت بودن، جدول روث رو تشکیل میدیم

3-1 تفسیر نتایج حاصل از جدول روث

- اگه همه‌ی عناصر ستون اول جدول، مثبت و مخالف صفر بودن، سیستم پایداره

- به تعداد تغییر علامت های ستون اول جدول، ریشه‌ی ناپایدار کننده (با سمت حقیقی مثبت) داریم

- اگه عناصر یه سطر صفر شدن ← البته اگه هیچ عنصری از سطر قبلیش صفر نباشه
← سیستم توی مرز ناپایداریه
← یعنی دوتا ریشه روی محور موهومی داره که فاصله‌شون از مبدأ به یه اندازه‌ست
← واسه‌ی پیدا کردن مقدار دقیق این ریشه ها:

$$Cs^2+D=0$$ C و D میشن عناصر سمت چپ و راست سطر قبلی

Scanned with CamScanner

3-2 حالت های خاص جدول روث

- اگه توی ستون اول صفر اومد
  - یه راه اینکه به جاش $\varepsilon = 0^+$ بزاریم و ادامه بدیم، بعدهم به صورت حدی تحلیل کنیم
  - یکی دیگه اینکه s ها رو به $\frac{1}{s}$ تبدیل کنیم و اینو برحسب توان های نزولی s مرتب و جدولی کنیم

- اگه همه‌ی عناصر یه سطر صفر بشن
  - معادله‌ی سطر بالایی‌ش رو تشکیل میدیم و ازش مشتق میگیریم و ضرایبش رو جای صفرا میذاریم

جای صفرا: معادله‌ی سطر بالایی $\leftarrow A(s) = b_1 s^m + b_2 s^{m-2} + \cdots$

$m =$ (بیشترین توان معادله مشخصه $+1$) $-$ (شماره‌ی سطر بالایی)

  - یعنی از هر ریشه‌ای، قرینه‌ش رو هم داره

4 روش مکان هندسی ریشه ها

4-1 معیار اندازه و زاویه

- تابع انتقال مدار باز سیستم → شکل استاندارد:

$$G(s).H(s) = K\frac{N}{D} = K\frac{\overbrace{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}^{\text{صفرهاش (m تا)}}}{\underbrace{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}_{\text{قطب هاش (n تا)}}}$$

→ معادله مشخصه سیستم:

پس خور منفی

$$1 \pm G(s)H(s) = 0 \Rightarrow 1 \pm K\frac{N}{D} = 0$$

پس خور مثبت

$$\Rightarrow K\frac{N}{D} = \mp 1 \Rightarrow K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = \mp 1$$

- معیار اندازه:

$$K\frac{|s-z_1| \times |s-z_2| \times \cdots \times |s-z_m|}{|s-p_1| \times |s-p_2| \times \cdots \times |s-p_n|} = 1$$

- معیار زاویه:

$$\left[\widehat{(s-z_1)} + \widehat{(s-z_2)} + \cdots\right] - \left[\widehat{(s-p_1)} + \widehat{(s-p_2)} + \cdots\right] = \begin{cases} (2i+1)\pi & \text{پس خور منفی} \\ (2i)\pi & \text{پس خور مثبت} \end{cases}$$

- در اصل داریم امتحان کردن اینکه آیا یه نقطه‌ی خاص جزء مکان هندسی هست یا نه

4-2 قواعد رسم نمودار مکان هندسی ریشه ها

- اول که همیشه $n \geq m$
- بعد هم اینکه همیشه نمودار مکان هندسی ریشه ها نسبت به محور حقیقی تقارن داره
- قرارداد واسه‌ی نمایش : صفرها (O) ، قطب ها (X)

4-2-1 قواعد رسم واسه‌ی سیستم پس‌خور منفی

1) تعدادِ شاخه‌های مکان با تعدادِ قطب های مدارباز (n) برابره

2) - نقطه‌ی شروعِ شاخه‌های مکان : $k=0$ از محلِ قطب ها
- نقطه‌ی پایان شون : $k=\infty$ از محلِ صفرها
- جهتِ فلش ها : جهتِ افزایشِ K (($n-m$) تا مجانب داریم!)
- تعدادِ $(n-m)$ شاخه‌ی باقی مونده توی صفرهای تموم می‌شن که توی ∞ و در امتدادِ مجانب هاهستن
- اگه یه قطبی از درجه q باشه (یعنی $(s-p_i)^q$) ، q تا شاخه‌ی مکان ازش خارج می‌شن

3) محلِ برخوردِ مجانب ها روی محورِ حقیقی (مرکز گرانش) :

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}P_i-\sum_{j=1}^{m}z_j}{n-m}=\frac{\text{مجموعِ صفرهای مدارباز}-\text{مجموعِ قطب‌های مدارباز}}{n-m}$$

4) زاویه‌ی مجانب ها با جهتِ مثبتِ محورِ حقیقی :

$$\theta=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}\quad,\quad k=0,1,\dots,n-m-1$$

5) اون قسمتی از خودِ محورِ حقیقی جزءِ مکان هندسیه که سمتِ راستش به تعدادِ فرد، قطب و صفر باشه (اگه نباشه، پاسخ مدار بسته نوسانیه)

6) - نقاط خاص:
- جدایی : نقطه ای که توش دو تا شاخه‌ی مکان که از قطب های مجاور روی محور حقیقی شروع شدن به هم می‌خورن و بعد محور حقیقی رو ترک می‌کنن (با زاویای $\pm\frac{\pi}{2}$)
- ورود : نقطه ای که دوتا شاخه‌ی مکان که به سمتِ صفرهای مجاور روی محورِ حقیقی دارن می‌رن بهشون وارد می‌شن (با زاویای $\pm\frac{\pi}{2}$)
- ریشه ی مضاعف

- راه‌های پیدا کردنشون:
- راهِ 1 : $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{s-z_j}$
- راهِ 2 : $\frac{dk}{ds}=0$

- البته ریشه‌هایی ازش قابل قبولن که توی حد فاصلِ مکان هندسی ای که روی محورحقیقیه باشن

⑦ ـ زوایای خروج شاخه‌های مکان از هر قطب درجه q :

$$\varphi_p = \frac{1}{q}\left((2k+1)\pi + \sum_{i=1}^{m} \widehat{(P_a - z_i)} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq a}}^{n} \widehat{(P_a - P_j)}\right) , \quad k=0,1,\cdots,q-1$$

قطب‌های خاص‌مون با مرتبه‌ی q

ـ زوایای ورود به صفرهای مخصوص از درجه‌ی q :

$$\varphi_z = \frac{1}{q}\left((2k+1)\pi + \sum_{j=1}^{n} \widehat{(z_b - p_j)} - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq b}}^{m} \widehat{(z_b - z_j)}\right) , \quad k=0,1,\cdots,q-1$$

صفر خاص‌مون با مرتبه‌ی q

ـ واسه‌ی قطب‌ها یا صفرهای ساده (روی محور حقیقی)، زوایای ترک یا ورود ، یا صفره و یا π

4-2-2 قواعد رسم واسه‌ی سیستم پس‌خور مثبت

ـ مشابه با حالت پس‌خور منفی بجز

④ $(2k+1) \longrightarrow 2k$

⑤ فرد $\longrightarrow$ زوج

⑦ $(2k+1) \longrightarrow 2k$

4-3 تحلیل مکان هندسی

ـ سیستم ناپایدار ← به ازای مقادیری از K که مکان هندسی ریشه‌ها سمت راست محور موهومی بره

ـ سیستم در آستانه‌ی ناپایداری ← به ازای مقادیری از K که مکان هندسی ریشه‌ها روی محور موهومی بیفته

← پیدا کردن K با تشکیل جدول روث

← یا جاگذاری فرکانس پاسخ ماندگار به ورودی سینوسی به‌جای s : $s=\pm\omega j$

ـ اگه ترم تأخیر ($e^{-\tau_d s}$) داشتیم، از تقریب pade مرتبه اول استفاده کنیم : $e^{-\tau_d s} \approx \frac{2-\tau_d s}{2+\tau_d s}$

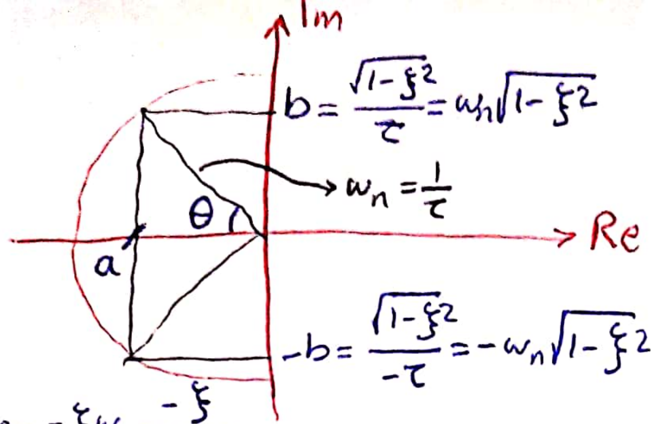
4-4 محل ریشه‌ها توی سیستم‌های درجه دوم

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1} = \frac{\frac{1}{\tau^2}}{\left(s-\left(\frac{-\xi}{\tau} - j\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau}\right)\right)\left(s-\left(\frac{-\xi}{\tau} + j\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau}\right)\right)}$$

$$\Longrightarrow \quad s = \frac{-\xi}{\tau} \pm j\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = a \pm j\, b$$

فرکانس نمایی میرایی

فرکانس میرایی نوسانات



$a=-\xi\omega_n=\frac{-\xi}{\tau}$

- فاصله‌ی ریشه‌ها تا مرکز:

$$\sqrt{(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2+(-\xi\omega_n)^2}=\omega_n=1/\tau$$

- زاویه‌ی ξ :

$$\cos\theta=\xi$$

- مکان هندسی
  - سیستم‌های با زمان پیک برابر: خط موازی محور حقیقی (شامل ریشه‌ی مورد نظر)
  - 〃 〃 پاسخ برابر: 〃 〃 〃 موهومی (〃 〃 〃 〃)
  - 〃 〃 فراجهش برابر: 〃 شعاع‌های از مبدا (〃 〃 〃 〃 〃 و با θ برابر)

- واسه‌ی تقریب زدن سیستم‌های درجه بالاتر با یه سیستم درجه 2 می‌شه از ریشه‌های ساده‌شون اگه مقدار منفی بزرگی داشتن صرف نظر کرد (معیار بزرگ بودن: $a \geq \frac{5\tau}{\xi}$)

4-5 اثر کنترلرها بر مکان هندسی ریشه‌ها

- اضافه کردن کنترلر تناسبی
  - توی شکل کلی مکان هندسی ریشه‌ها تغییری ایجاد نمی‌شه
  - ولی مقدار ریشه‌ها عوض می‌شه

- 〃 〃 عامل مشتق (PD)

$$G_c \triangleq K_c(1+\tau_D s)=K_c\tau_D\left(s+\frac{1}{\tau_D}\right)$$

  - یه صفر با مقدار $z=\frac{-1}{\tau_D}$ به سیستم مدار باز اضافه می‌شه
  - پایداری رو بهبود می‌ده
    - یعنی یا کلن ناپایدار رو پایدار می‌کنه یا K حد پایداری رو زیاد می‌کنه
    - تعداد مجانب‌ها رو کم می‌کنه و زاویه‌شون با محور حقیقی رو زیاد

- 〃 〃 〃 انتگرالی (PI)

$$G_c=K_c\left(1+\frac{1}{\tau_I s}\right)=K_c\left(\frac{1}{s}\right)\left(s+\frac{1}{\tau_I}\right)$$

  - یه قطب توی مبدأ $(P=0)$ و یه صفر توی $z=\frac{-1}{\tau_I}$ اضافه می‌کنه
  - پس تعداد مجانب‌ها و زاویه‌شون تغییر نمی‌کنه ولی محل همرسی مجانب‌ها به سمت راست منتقل می‌شه

«فصل 05 تجزیه و تحلیل پاسخ فرکانسی سیستم‌ها»

① بررسی پاسخ فرکانسی سیستم‌ها

$$x(t)=A\sin(\omega t+\theta) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y(t)=B\sin(\omega t+\theta+\varphi)$$

$$AR=\frac{B}{A}$$

- قاعده‌ی جانشانی: اگه توی تابع $G(s)$، بجای s، $j\omega$ بزاریم، عدد مختلط $G(j\omega)$ به دست میاد که اندازش می‌شه AR و زاویه‌ش می‌شه φ

یعنی:

$$G(s)\Big|_{s=j\omega}=G(j\omega)=a+bj$$

$$AR=|G(j\omega)|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\varphi=\hat{G}(j\omega)=\arctan\frac{b}{a}$$

واسه‌ی عدد مختلط به فرم: $re^{j\theta}$ (r ← اندازه، θ → زاویه)

محدودیت: تابع انتقال سیستم مورد نظر، منجر به پاسخ‌های پایدار بشه

- تعمیم واسه‌ی تابع انتقال ردبرد:

$$G(s)=\frac{G_1(s)\cdot G_2(s)\cdots G_n(s)}{G_{n+1}(s)\cdot G_{n+2}(s)\cdots G_{n+m}(s)}$$

$$AR=|G(j\omega)|=\left|\frac{G_1(j\omega)G_2(j\omega)\cdots G_n(j\omega)}{G_{n+1}(j\omega)G_{n+2}(j\omega)\cdots G_{n+m}(j\omega)}\right|$$

$$=\frac{|G_1(j\omega)|\times|G_2(j\omega)|\times\cdots\times|G_n(j\omega)|}{|G_{n+1}(j\omega)|\times|G_{n+2}(j\omega)|\times\cdots\times|G_{n+m}(j\omega)|}\Longrightarrow AR=\frac{AR_1\times AR_2\times\cdots\times AR_n}{AR_{n+1}\times AR_{n+2}\times\cdots\times AR_{n+m}}$$

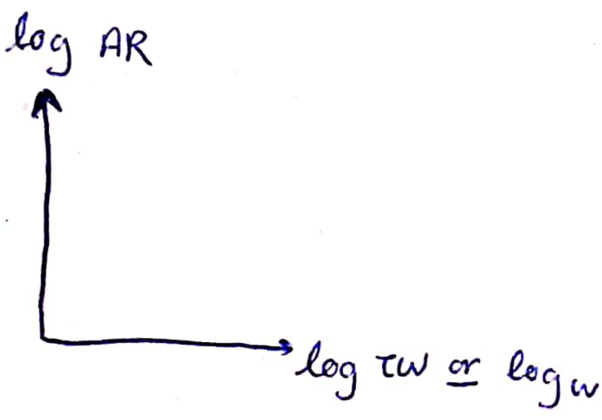
$$\varphi=\hat{G}(j\omega)=[\hat{G_1}(j\omega)+\hat{G_2}(j\omega)+\cdots+\hat{G_n}(j\omega)]-[\hat{G}_{n+1}(j\omega)+\hat{G}_{n+2}(j\omega)+\cdots+\hat{G}_{n+m}(j\omega)]$$

- زوایای خاص:

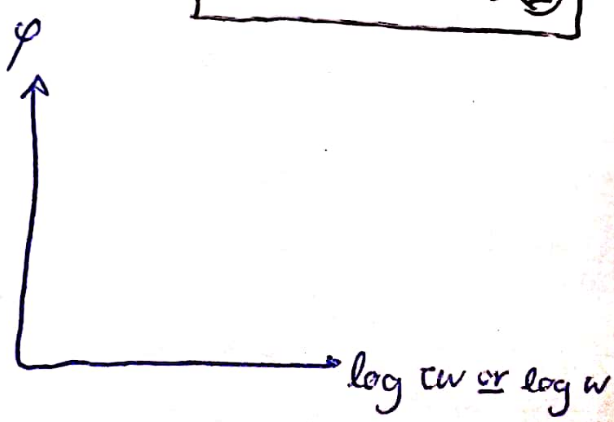
$$\varphi(j\omega)=\frac{\pi}{2}\quad,\quad \varphi(1-j\omega)=-\arctan\omega$$

$$\varphi\left(\frac{1}{j\omega}\right)=\frac{-\pi}{2}\quad,\quad \varphi(j\omega-1)=\pi-\arctan\omega$$

② نمودارهای بُد (Bode)



و



2-1 رسم نمودارهای بُد واسه سیستم‌های پایه

2-1-1 سیستم درجه اول $G(s)=\frac{1}{\tau s+1}$

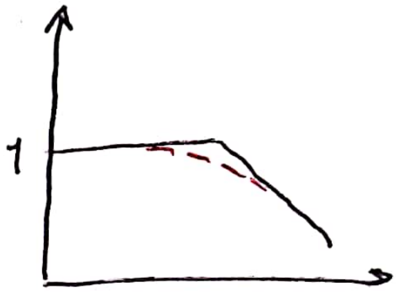
ⓐ $AR=\frac{1}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}} \Rightarrow \log AR=\frac{-1}{2}\log[(\tau\omega)^2+1]$

جانب فرکانس‌های پایین : $\tau\omega\to 0 \Rightarrow \log AR=0 \Rightarrow AR=1$

" " بالا : $\tau\omega\to\infty \Rightarrow \log AR=-\log\tau\omega \Rightarrow AR=\frac{1}{\tau\omega}$

محل تلاقی دو جانب : $\frac{1}{\tau\omega}=1 \Rightarrow \omega_c=\frac{1}{\tau}$

(corner frequency) فرکانس گوشه

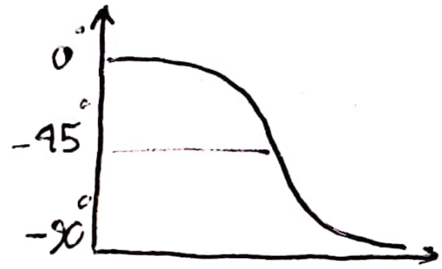


ⓑ $\varphi=\arctan(-\tau\omega)$

$\tau\omega\to 0 \Rightarrow \varphi=0^\circ$

$\tau\omega\to 1 \Rightarrow \varphi=-45^\circ$

$\tau\omega\to\infty \Rightarrow \varphi=-90^\circ$



$AR|_{\omega_c}=0.707 \Rightarrow error \leq 30\%.$ ـ مقدار واقعی AR توی فرکانس گوشه

2-1-2 سیستم درجه دوم $G(s)=\frac{1}{\tau^2s^2+2\tau\zeta s+1}$

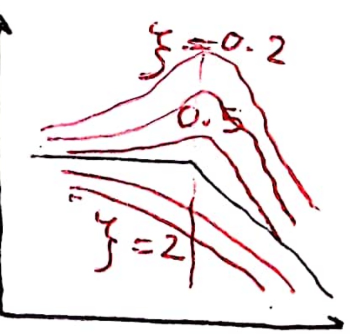
ⓐ $AR=\frac{1}{\sqrt{(1-(\tau\omega)^2)^2+(2\tau\zeta\omega)^2}} \Rightarrow \log AR=\frac{-1}{2}\log[(1-(\tau\omega)^2)^2+(2\tau\zeta\omega)^2]$

$\tau\omega\to 0 \Rightarrow \log AR=0 \Rightarrow AR=1$

$\tau\omega\to\infty \Rightarrow \log AR=\frac{-1}{2}\log(\tau\omega)^4=-2\log(\tau\omega)$

$\Rightarrow AR=\frac{1}{(\tau\omega)^2}$

$\omega_c=\frac{1}{\tau}$

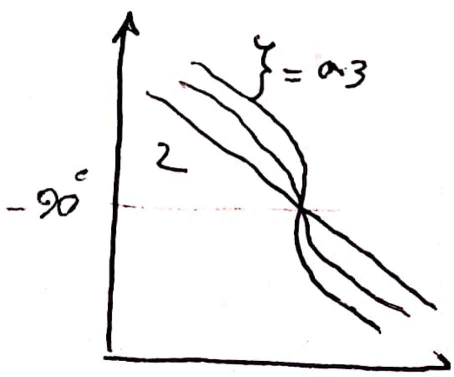


ⓑ $\varphi=\arctan\left(\frac{-2\tau\zeta\omega}{1-(\tau\omega)^2}\right)$

$\tau\omega\to 0 \Rightarrow \varphi=0^\circ$

$\tau\omega\to 1 \Rightarrow \varphi=-90^\circ$

$\tau\omega\to\infty \Rightarrow \varphi=-180^\circ$



$AR < 1 \quad : \quad \xi > \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7$ ـ واضحه که به ازای

$AR > 1 \quad \xi < 0.7$

وقتی به فرکانس خاصی، از مقدار max رد می‌شن :

$$\omega_r = \omega_{max} = \frac{1}{\tau}\sqrt{1-2\xi^2}$$

فرکانس تشدید (Resonant frequency)

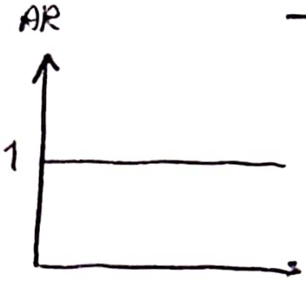
$$AR_{max} = AR\Big|_{\omega_r} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-2\xi^2}}$$

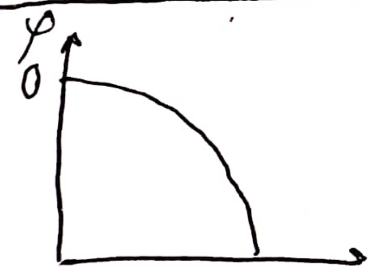
2-1-3 تابع انتقال تأخیری $G(s) = e^{-\tau_d s}$

$AR = 1$

$\varphi = -\tau_d \omega \ \text{rad}$

$= -57.3\tau_d \omega \ {}^\circ$



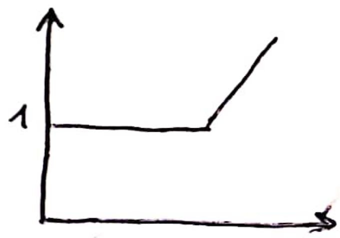


2-1-4 تابع انتقال $G(s) = \tau s + 1$

ⓐ $AR = \sqrt{1+\tau^2\omega^2} \Rightarrow \log AR = \frac{1}{2}\log(1+\tau^2\omega^2)$

$\tau\omega \to 0 \Rightarrow \log AR = 0 \Rightarrow AR = 1$

$\tau\omega \to \infty \Rightarrow \log AR = \log \tau\omega$

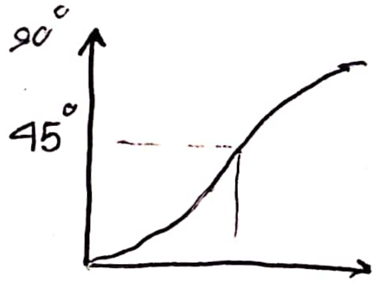


ⓑ $\varphi = \arctan(\tau\omega)$

$\tau\omega \to 0 \Rightarrow \varphi = 0^\circ$

$\tau\omega \to 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ$

$\tau\omega \to \infty \Rightarrow \varphi = 90^\circ$

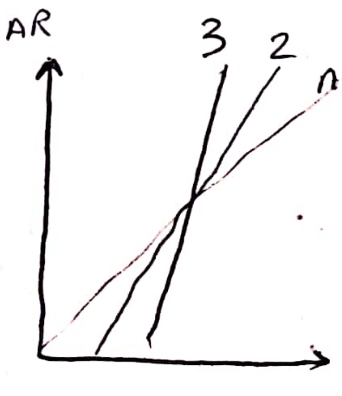


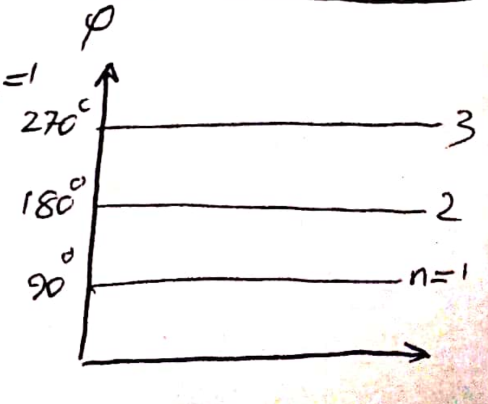
2-1-5 تابع انتقال $G(s) = s^n$

ⓐ $AR = \omega^n$

$\log AR = n \cdot \log \omega$

ⓑ $\varphi = \arctan\left(\frac{\omega^n}{0}\right) = (90n)^\circ$





2-2 نمودار بُد واسه‌ی سیستم‌های پیچیده

- راه تشریحی
  - واسه‌ی log AR:

$$\log AR = [\log AR_1 + \log AR_2 + \cdots + \log AR_n] - [\log AR_{n+1} + \log AR_{n+2} + \cdots + \log AR_{n+m}]$$

  - واسه‌ی φ هم همون تعمیم جانشانی

- راه شَتی
  - اول فرکانس گوشه‌ها رو در میاریم و با اون شیب‌ها رو تحلیل می‌کنیم
  - صورت تابع رو هم باید استاندارد کنیم

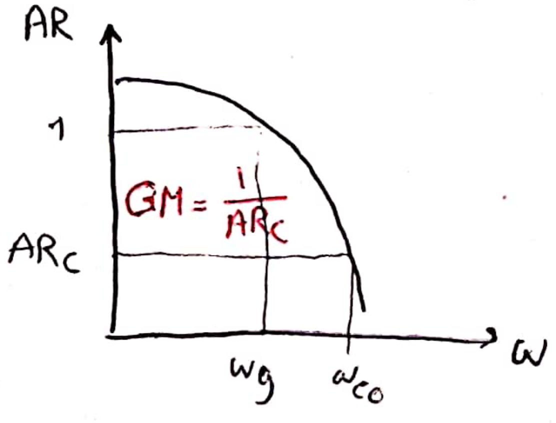
2-3 معیار پایداری بُد

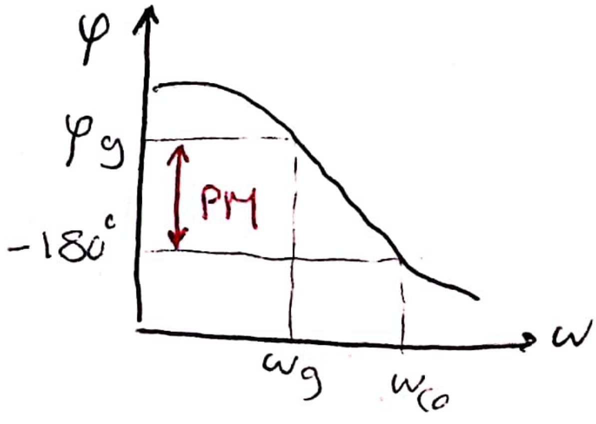
- شرط پایداری واسه‌ی سیستم مداربسته
  - توی پاسخ فرکانسی مدارباز، نسبت دامنه‌ها (AR) توی فرکانس بحرانی (ω_{co})، کوچکتر از یک (1) شه
  - فرکانس بحرانی: فرکانسی که توش $\varphi = \underline{-180^\circ}$ بشه
  - یعنی: $GM > 1$ or $AR_c < 1$ (به علاوه‌ی $PM > 0$)
  - بهره‌ی بحرانی یا نهایی سیستم (K_u): مقداری از K_c که به ازاش، $AR = 1$ بشه
  - واسه‌ی عملکرد خوب و پایدار سیستم، باید K_c و K_u با هم فاصله داشته باشن

- حاشیه‌ی بهره
  - Gain-Margin (GM)
  - عکس نسبت دامنه‌ها توی فرکانس بحرانی: $GM = \frac{1}{AR_c}$

- حاشیه‌ی فاز
  - Phase-Margin (PM)
  - اختلاف میان زاویه‌ی فاز توی فرکانسی که توش $AR = 1$ (φ_g) از زاویه‌ی فاز $\underline{-180^\circ}$

$$PM = \varphi_g - (-180^\circ) = \varphi_g \pm 180^\circ = \varphi_g + \pi$$





③ انتخاب پارامترهای کنترلر براساس روش Ziegler-Nichols

- اول تابع مدار باز سیستم بدون کنترلر را بدست بیاریم
- بعد اینارو حساب می کنیم:

بهره نهایی : $K_u = GM$

پریود نهایی : $P_u = \frac{2\pi}{\omega_{co}}$

τ_D	τ_I	K_c	نوع کنترلر
—	—	$0.5K_u$	P
—	$\frac{P_u}{1.2}$	$0.45K_u$	PI
$P_u/8$	$P_u/2$	$0.6K_u$	PID

④ منحنی نایکوئیست (قطبی) Nyquist diagram

- بررسی پایداری سیستم‌ها ←
  - اول منحنی نایکوئیست تابع انتقال مدار باز رو به ازای $-\infty < \omega < +\infty$ رسم می‌کنیم
  - تعداد دور خوردن‌های نقطه‌ی $\underline{-1+0j}$ (دور زدن) در جهت ساعت‌گرد $= N$
  - تعداد قطب های مدار باز سیستم سمت راست محور موهومی $= P$
  - تعداد ریشه‌های ناپایدارکننده : $Z = N + P$

- حاشیه‌ی بهره و حاشیه‌ی فاز ← با فرمول برد جلو