HARVEST 01

« ریاضی - مدلسازی »

① موازنه جرم، انرژی و حرارت

$$\underbrace{\frac{\partial C_i}{\partial t}}_{\text{ناپایا}}+\underbrace{u\cdot\nabla C_i}_{\text{جابجایی}}=\underbrace{D\cdot\nabla^2 C_i}_{\text{نفوذ}}+\underbrace{R_i}_{\text{واکنش}}$$

- موازنه جرم
  - معادله کلی پیوستگی :
  - قانون 2 فیک (سیال ساکن و بدون واکنش)

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\cdot\nabla T\right)=k\cdot\nabla^2 T+\dot q$$

- موازنه حرارت
  - معادله کلی انتقال حرارت :
  - مقدار انرژی‌ای که توده‌ی سیال با سرعت u داره حمل می‌کنه :
  - تجمع انرژی :

$$q=\dot m c_p T=(\rho u A)c_p T$$

$$\frac{d}{dt}(m c_p T)=m c_p\frac{dT}{dt}$$

- موازنه اندازه حرکت
  - معادله حرکت :

$$\rho\frac{d\vec u}{dt}=-\nabla\vec\tau-\nabla\vec P+\rho\vec g$$

  - ناویر-استوکس (حرکت با ρ و μ ثابت، یعنی: $(-\nabla\vec\tau=\mu\nabla^2\vec u)$
  - اویلر (ناویر-استوکس واسه‌ی غیر ویسکوز، یعنی $\mu=0$)
  - مفهوم تنش : شار مولکولی انتقال مومنتوم توسط مؤلفه V_x در جهت y

$$\tau_{xy}=-\mu\frac{dV_x}{dy}$$

  - توی جریان کاملاً توسعه‌یافته توی لوله، سرعت در امتداد محور لوله تغییر نمی‌کنه (یعنی $\frac{\partial V_z}{\partial z}=0$)
  - حرکت توی مایعات اغلب به خاطر اعمال فشاره

- اگه یه بعدی خیلی طولانی یا خیلی ناچیز باشه، از انتقال جرم و حرارت توی اون راستا صرف‌نظر کنیم
- اگه توی یه سیستم، پدیده‌ی انتقال توی یه جهت هم [باشه / نباشه]، ورودی یا خروجی از اطراف پیرامونی او جهت [یه سری شرط مرزی میاد توی معادله دیف]
- نفوذ مولکولی = نفوذ توده‌ای $\Longleftarrow$ $K(C_\infty-C_N)=D\frac{C_{N-1}-C_N}{\Delta r}$

② راکتورها

- CSTR :

$$V\cdot\frac{dC}{dt}=qC_i-qC+V\cdot r$$

- PFR :

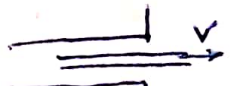
$$U\cdot\frac{dC_A}{dx}=D\frac{d^2C_A}{dx^2}-kC_A$$

(از پیوستگی بدست میاد)

$$C(x)=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$$

③ پلیمرها

- معادله حرکت توی دای :



$$\underbrace{\rho\frac{\partial V_z}{\partial z}}_{\text{ترم ناپایا}}=-\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz})$$

ترم ناپایا (مشخص نیست بعد از شروع حرکت)

جهت حرکت سیال ← → جهت انتقال تنش

④ ریزه‌کاری

- فرم صحیح لاپلاسین توی جهت شعاعی
  - استوانه‌ای :

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial U}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial r}$$

  - کروی :

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{\partial U}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2U}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU)$$

- توی مختصات کارتزین، معادلات سهل‌تر ظاهر می‌شن

- یه حرکت کثیف :

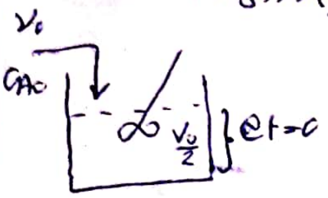
$$T(x,t)=B\int_0^{u(x,t)}A(a)\,da$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=B\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(u(x,t)\cdot A(a\to u(x,t))\Big)$$

ناپایان - حالت ناپایا

- طولانی بودن توی یه راستا ⟶ صرف نظر از تغییرات غلظت یا سرعت توی اون راستا
- برقرار نبودن تقارن ⟶ وجود تغییرات غلظت در راستای θ

± یه مخزن که تا نصفه، حاوی آب خالص به حجم $\frac{V_0}{2}$ ه، از لحظه‌ی $t=0$، جریان آب نمک به دبی ν_0 و غلظت C_{A0} وارد می‌شه. معادله‌ی غلظت نمک توی مخزن تا قبل از لحظه‌ی سرریز شدن با زمان



تجمع = خروجی - ورودی

ورودی $= C_{A0}\nu_0$ ، خروجی $=0$ ، تجمع $= \frac{dm}{dt} = \frac{d(C_A V)}{dt} = C_A\frac{dV}{dt} + V\frac{dC_A}{dt}$

$$\Rightarrow \cancel{C_{A0}\nu_0} \quad V = \frac{V_0}{2} + \nu_0 t$$

$$\Rightarrow C_{A0}\nu_0 - 0 = C_A\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{V_0}{2}+\nu_0 t\right) + \left(\frac{V_0}{2}+\nu_0 t\right)\cdot\frac{dC_A}{dt}$$

$$\Rightarrow C_{A0}\nu_0 = C_A\nu_0 + \left(\frac{V_0}{2}+\nu_0 t\right)\cdot\frac{dC_A}{dt} \Rightarrow \nu_0(C_{A0}-C_A) = \left(\frac{V_0}{2}+\nu_0 t\right)\cdot\frac{dC_A}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dC_A}{dt} = \frac{\nu_0(C_{A0}-C_A)}{\frac{V_0}{2}+\nu_0 t} = \frac{C_{A0}-C_A}{\frac{\tau}{2}+t}$$

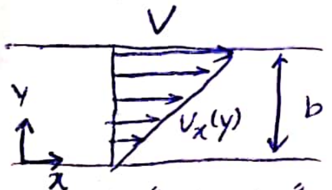
± ذره‌ای که انرژی گرمایی در واحد حجم $\dot q$ رو تولید می‌کنه، توی محیطی با h و T_∞ در نظر بگیریم:

تجمع = مصرف - تولید + خروجی - ورودی

$$\Rightarrow 0 - hA(T-T_\infty) + \dot q V - 0 = \rho V c\frac{dT}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{hA}{\rho V c}(T-T_\infty) = \frac{\dot q}{\rho c}$$

± معادله‌ی توزیع دمای پایدار جریان مذاب توی یه رئومتر استوانه‌ای که جریان مذاب پلیمری در صفحه تقریب زده می‌شه

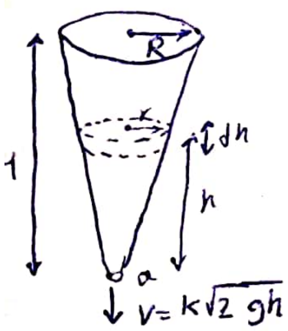


$$V(y) = \frac{V}{b}y \quad , \quad \dot\gamma = \frac{dV(y)}{dy} = \frac{V}{b} \quad , \quad \tau = \mu\dot\gamma = \mu\frac{V}{b}$$

$Q = -\tau\dot\gamma = -\mu\frac{V^2}{b^2}$ ⟵ گرمایش حاصل از گرمایش سیال

$$k\frac{d^2T}{dy^2} = Q \Rightarrow k\frac{d^2T}{dy^2} + \mu\frac{V^2}{b^2} = 0$$

± زمان لازم واسه تخلیه‌ی کامل آب مخزن از روزنه‌ای به سطح مقطع a :



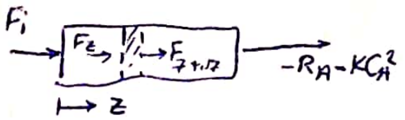
$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H}$$

تغییر آب توی مخزن $= -\pi r^2 dh = -\pi\frac{R^2h^2}{H^2}dh$ ①

مقدار آب خروجی $= av\,dt = ak\sqrt{2gh}\,dt$ ②

$$① = ② \Rightarrow \frac{-\pi R^2}{akH^2\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{h^2}{\sqrt h}dh = \int_0^{t_f}dt \Rightarrow t_f = \frac{\pi R^2}{5ak}\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

± معادله حاکم: درصد تبدیل بر حسب طول راکتور پلاگ واسه واکنش گازی درجه دوم



$$F_z - F_{z+dz} - (-R)dV = 0 \Rightarrow F_z - F_{z+dz} + RA\,dz = 0 \Rightarrow -\frac{dF_z}{dz} + RA = 0 \quad \text{I}$$

$$F_z = F_i(1-x) \Rightarrow \frac{dF_z}{dz} = -F_i\frac{dx_A}{dz} \quad \text{II} \Rightarrow F_i\frac{dx_A}{dz} = kC_{A0}^2 A\frac{(1-x_A)^2}{(1+\varepsilon_A x_A)^2}$$

$$-R_A = kC_A^2 = kC_{A0}^2\frac{(1-x_A)^2}{(1+\varepsilon_A x_A)^2} \quad \text{III}$$

HARVEST 02

«ریاضی - معادله دیف معمولی»

- مرتبه (رتبه) ← بالاترین مرتبه‌ی مشتق توی معادله دیف
- درجه ← توان ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~
  - اگه توان کسری داشتیم، باید از این حالت دربیاریم
- جواب غیر عادی
  - ← جواب عمومی (دسته منحنی) $F(x,y,c)=0$ ← باید c رو حذف کنیم :

$$\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial c}=0 \end{cases}$$

  - ← $F(x,y,y')=0$ ~ ~ ~
    - تغییر متغیر : $y'=P$
    - حذف P :

$$\begin{cases} F(x,y,P)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial P}=0 \end{cases}$$

  - ← معادلات دیف خطی، همچنین جوابی ندارن

- تشکیل معادله دیف
  - اگه جواب عمومی رو داشتیم : ثوابت رو حذف می‌کنیم
  - اگه چند تا جواب داشتیم :

اینا رو داریم

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y' & y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{(n)} & y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}=0$$

اینا همینجوری می‌مونن

اینا رو درمیاریم

- مسیرهای قائم : $y' \longrightarrow \dfrac{-1}{y'}$

$$\begin{cases} (x-c)^2+y^2-1=0 \\ -2(x-c)=0 \Rightarrow x=c \end{cases} \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$$

$(x-c)^2+y^2=1$:

± جواب غیر عادی دسته منحنی

- معادلات پیوستگی
  - کارتزین :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z)=0$$

  - استوانه‌ای :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(\rho r u_r)+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z)=0$$

  - کروی :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 u_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta \sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho u_\varphi)=0$$

$$\int \tan u\, du = -\ln(\cos u)$$

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$$

HARVEST 03 « ریاضی - معادلات دیف مرتبه اول »

- تغییر متغیر واسه‌ی معادله دیف همگن : $\frac{y}{x}=v$: $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$

- $y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ ⇐ $\begin{cases}x_0\\y_0\end{cases}$ نقطه‌ی تلاقی ⇐ $\begin{cases}x=X+x_0\\y=Y+y_0\end{cases}$ تغییر متغیر ⇐ تغییر متغیر: $Y=VX$

- معادلات دیف کامل
  - قیانه: $p(x,y)dx+q(x,y)dy=0$
  - شرط کامل بودن: $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}$
  - حل گردشی هم که داخله

- فاکتور انتگرال:

1 if $\frac{1}{q}\left(\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}\right)=f(x)$ $\Rightarrow \mu=e^{\int f(x)dx}$

2 if $-\frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}\right)=f(y)$ $\Rightarrow \mu=e^{\int f(y)dy}$

3 if $pdx+qdy=0$ همگن $\Rightarrow \mu=\frac{1}{px+qy}$

- معادله دیف خطی مرتبه اول
  - قیانه: $g'(y)y'+p(x)\cdot g(y)=q(x)$ ← $v=g(y)$ ، $v'+v\cdot p(x)=q(x)$
  - عامل انتگرال: $\mu=e^{\int pdx}$
  - حل: $y=e^{-\int pdx}\left[\int qe^{\int pdx}dx+c\right]$

- معادله برنولی
  - قیانه: $y'+p(x)\cdot y=q(x)\cdot y^n$ تغییر متغیر $v=y^{1-n}$ عامل انتگرال: $\mu=e^{(1-n)\int pdx}$
  - حل: $v\cdot e^{(1-n)\int pdx}=(1-n)\left[\int qe^{(1-n)\int pdx}dx+c\right]$

- معادله ریکاتی
  - قیانه: $y'+p(x)\cdot y+q(x)\cdot y^2=R(x)$
  - اگه یه جواب خصوصی مثل $y_1(x)$ باشه
    - جواب عمومیش: $y(x)=y_1(x)+\frac{1}{v(x)}$
    - y_1 رو جاگذاری می‌کنیم و y و y' رو در میاریم
    - توی معادله مادری می‌ذاریم تا یه معادله برحسب v برسیم

- معادله کلرو
  - قیانه: $y=xy'+f(y')$
  - جواب عمومی ($y'\to c$): $y=xc+f(c)$
  - جواب غیرعادی: $\begin{cases}y=xc+f(c)\\0=x+f'(c)\end{cases}$ حذف c

- اگه جواب یه معادله رو داشتیم و مقدار y' رو توی یه x و y مشخص می‌خواستیم
  - از طرفین جواب نسبت به x مشتق می‌گیریم
  - x و y رو می‌ذاریم و y' رو در میاریم

HARVEST 09

ریاضی – معادلات دیف مرتبه 2 و بالاتر

- تعیین مستقل بودن جواب‌ها
  - رونسکین توابع رو در میاریم
  - اگه صفر شد، وابسته‌ان
  - وگرنه که مستقلن

$$\omega(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

- مقدار نهایی y توی $x \to \infty$:

① معادلات کوشی – اویلر

- معادلاتش
  - قیافه‌شون: $(x^n D^n + b_1 x^{n-1} D^{n-1} + \dots + b_{n-1} x D + b_n) y = R(x)$
  - تغییر متغیر: $x = e^z$ $(z = \ln x)$

- مرتبه 2
  - قیافه
    - قبل از عمل: $x^2 y'' + a x y' + b y = 0$
    - بعد تغییر متغیر: $y'' + (a-1) y' + b y = 0$
    - جواباش

$$y = c_1 e^{m_1 z} + c_2 e^{m_2 z} = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$$

$$y = (c_1 + c_2 \cdot z) e^{m z} = (c_1 + c_2 \cdot \ln x) x^m$$

$$y = e^{\alpha z} [c_1 \cos(\beta z) + c_2 \sin(\beta z)]$$

$$= x^{\alpha} [c_1 \cos(\beta \cdot \ln x) + c_2 \sin(\beta \cdot \ln x)]$$

  - حالت تعمیم یافته
    - قیافه: $(\alpha x + \beta)^2 \cdot y'' + a \cdot (\alpha x + \beta) y' + b y = 0$
    - تغییر متغیر: $\alpha x + \beta = e^z$

② معادلاتی با یه جواب معلوم

- واسه‌ی معادله دیف خطی و همگن
  - $y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0$
  - یه جوابش: y_1
  - جواب دیگه‌ش
    - $y_2 = u y_1$
    - $u = \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p\, dx} dx$
  - بعضی وقتا‌یی‌شه یه جواب رو حدس زد:

if:

$$p + x q = 0 \implies y_1 = x$$

$$1 + p + q = 0 \implies y_1 = e^x$$

$$1 - p + q = 0 \implies y_1 = e^{-x}$$

$$a^2 + a p + q = 0 \implies y_1 = e^{a x}$$

③ سری‌ها

- ضریبِ x^k توی بسطِ مک لورن : $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ ← با جاگذاری توی معادله (اگه معادله داد)

- سری‌های همگرای پرکاربرد :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

- تعیینِ نقاطِ عادی و منفرد واسه‌ی معادله دیفِ مرتبه 2 خطی

← فرم کلی : $p(x)\cdot y'' + q(x)\cdot y' + r(x)\cdot y = 0$

← اگه $p(x_0) \neq 0$ یا $\left.\frac{q(x)}{p(x)}\right|_{x=x_0}$ و $\left.\frac{r(x)}{p(x)}\right|_{x=x_0}$ تعریف شده باشن

← اینا OK بودن ، x_0 یه نقطه عادیه

← // نبودن

← $\lim_{x \to x_0} (x-x_0)\frac{q(x)}{p(x)}$

← $\lim_{x \to x_0} (x-x_0)^2 \frac{r(x)}{p(x)}$

← اگه جفتِ اینا تعریف شده بودن ، x_0 یه نقطه‌ی منفردِ منظمه

← اگه حتی یکیشون OK نبود ، x_0 یه نقطه‌ی منفردِ نامنظمه

- روشِ فروبنیوس واسه‌ی حلِ معادله دیفِ مرتبه 2 حولِ یه نقطه‌ی منفرد

← قیافه‌ی معادله : ① $y'' + p(x)\cdot y' + q(x)\cdot y = 0$

← اول اینارو حساب می‌کنیم

$$P_0 = \lim_{x \to 0} x\,p(x)$$

$$q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 q(x)$$

← معادله مشخصه : $m(m-1) + P_0 m + q_0 = 0$

← براساسِ m_1 و m_2

← $m_1 \neq m_2$ ، فاصله‌شون عددی غیرِ صحیح : $y_1(x) = \sum a_n x^{n+m_1}$ ، $y_2 = \sum a_n x^{n+m_2}$

← $m_1 = m_2$ ، $y_1(x) = \sum a_n x^{n+m}$ ، $y_2 = y_1(x)\cdot \ln x + \sum b_n x^{n+m}$

← $m_1 \neq m_2$ و فاصله‌شون عدد صحیح : $y_1(x) = \sum a_n x^{n+m_1}$ ، $y_2 = k y_1(x)\cdot \ln x + \sum b_n x^{n+m_2}$

« ریاضی - توابع لژاندر، بسل و توابع خاص »

① معادله دیف و توابع لژاندر

$$(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0$$

- $x=0$ داشتن یه نقطه‌ی عادیه (واسه حلش از سری فروبنیوس استفاده نمی‌شه)
- جملات، فردش از مبدأ رد می‌شن
- $P_\nu(-x)=(-1)^\nu \cdot P_\nu(x)$

$P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$

$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$, $P_6(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$

- یعنی چند جمله‌ای های لژاندر از مرتبه‌ی [زوج / فرد] ، یه تابع [زوج / فرد] ‌ان

$$P_\nu(x)=\frac{1}{2^\nu \cdot \nu!}\cdot\frac{d^\nu}{dx^\nu}(x^2-1)^\nu$$

- قضیه‌ی تعامد‌شون :

$$\int_{-1}^{1} P_\nu(x)\cdot P_w(x)\,dx=\begin{cases}0 & ; \nu\neq w\\ \int_{-1}^{1} P_\nu^2(x)\,dx=\frac{2}{2\nu+1} & ; \nu=w\end{cases}$$

تابع وزن $=1$

$$P_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu+1}{\nu+1}x\cdot P_\nu(x)-\frac{\nu}{\nu+1}P_{\nu-1}(x)$$

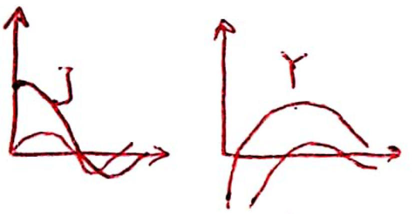
② معادله دیف و توابع بسل

$$x^2y''+xy'+(x^2-\lambda^2)y=0$$

- $x=0$ داشتن یه نقطه‌ی غیرعادی منظم
- جوابش

$y_g=c_1J_\lambda(x)+c_2J_{-\lambda}(x)$: $2\lambda\notin\mathbb{Z}^+$

$y_g=c_1J_\nu(x)+c_2Y_\nu(x)$: $2\lambda\in\mathbb{Z}^+-\{0\}$



- اگه ν [زوج / فرد] باشه، تابع بسل نوع اول هم [زوج / فرد]

$$\int x^\lambda J_{\lambda-1}(x)\,dx=x^\lambda J_\lambda(x)+c \rightarrow \int xJ_0(x)\,dx=xJ_1(x)$$

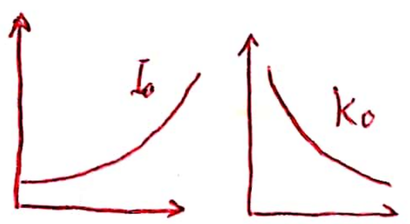
$$\int -x^{-\lambda}J_{\lambda+1}(x)\,dx=x^{-\lambda}\cdot J_\lambda(x)$$

$4x^2y''+4xy'+(x-\lambda^2)y=0$ / $t=\sqrt{x}$ / λ / $y=c_1J_\lambda(\sqrt{x})+c_2Y_\lambda(\sqrt{x})$

$$J'_\alpha=\frac{J_{\alpha-1}-J_{\alpha+1}}{2}$$

$x^2y''+xy'+(\xi^2x^2-\lambda^2)y=0$ / $t=\xi x$ / λ / $y=c_1J_\lambda(\xi x)+c_2Y_\lambda(\xi x)$

$x^2y''+xy'-(x^2+\lambda^2)y=0$ [بسل پیراسته] , $y=c_1I_\lambda(x)+c_2K_\lambda(x)$



$I_n(x)=i^{-n}\cdot J_n(ix)$ → $n=0$: $I_0(x)=J_0(ix)$; $n=1$: $I_1(x)=i^{-1}\cdot J_1(ix)$

$J_0(0)=I_0(0)=1$, $J_\nu(0)=I_\nu(0)=0$

$x^2y''+xy'-(\xi^2x^2+\lambda^2)y=0$ / $t=\xi x/\lambda$ / $y=c_1I_\lambda(\xi x)+c_2K_\lambda(\xi x)$

- اگه یه تغییر متغیر داد، برنش (حواست به توان x توی λ باشه)

$$\left.\begin{aligned}J_{-n}(x)&=(-1)^n\cdot J_n(x)\\ Y_{-n}(x)&=(-1)^n\cdot Y_n(x)\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}I_{-n}(x)&=I_n(x)\\ K_{-n}(x)&=K_n(x)\end{aligned}$$

③ تابع گاما

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-t}\,t^{\alpha-1}\,dt \longrightarrow \Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha) \qquad \Gamma(1)=1 \quad , \quad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$\longrightarrow \Gamma(n+1)=n! \qquad \Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

④ تابع خطا

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,du = 1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-u^2}\,du$$

$\operatorname{erfc}(x)=1-\operatorname{erf}(x)$ $\qquad \operatorname{erf}(0)=0$

$\operatorname{erfc}(-x)=-\operatorname{erf}(x)$ $\qquad \operatorname{erf}(\infty)=1$

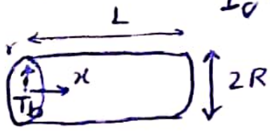
$\operatorname{erf}(x)+\operatorname{erfc}(x)=1$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\operatorname{erf}(x)\right)&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\\ \frac{d}{dx}\left(\operatorname{erfc}(x)\right)&=\frac{-2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\end{aligned}\right\} \quad \frac{d}{dx}\left(\operatorname{erf}(u)\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{du}{dx}\cdot e^{-u^2}$$

$$\pm \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} \quad , \quad u=-\ln x \ , \ x=e^{-u} \ , \ dx=-e^{-u}du \ , \ 1_0^1 \to 1_\infty^0$$

$$=\int_\infty^0 \frac{-e^{-u}\,du}{\sqrt{u}}=\int_0^\infty e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\,du=\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

± توزیع دما توی پره‌ی مثلثی به $J_0(x)$ می‌خوره (نوسانیه این ولی تغییرات دما توی طول پره یکنواخته) ← I_0 ✓



± پره‌ی استوانه‌ای شکل با k، شعاع R و طول L دمای T_b از کنار در محیط با T_∞ و h_∞:

$$T-T_\infty=\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r)\cdot \sinh\left[\lambda_n(L-x)\right]$$

± واسه‌ی تقریب به تابع باید از توابع متعامد استفاده کرد

$$x^2y''+(2k+1)xy'+x^2y=0 \xrightarrow{z=x^k y} x^2z''+xz'+(x^2-k^2)z=0$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \quad , \quad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

«ریاضی - تعامد و توابع متعامد»

- توابع اورتوگونال ← انتگرال حاصلضرب شون صفره (یعنی حاصلضرب شون یه تابع فرده) : $\int_a^b A(x)B(x)\,dx=0$
- " " اورتونرمال ← به صورت ریاضی داریم که هم اورتوگونال باشه وهم : $\int_a^b A^2(x)=1$

- توابع متعامد معروف ← مثلثاتی ←
  - دو تا sin : $\int_{-L}^{L}\sin(\frac{n\pi}{L}x)\cdot\sin(\frac{m\pi}{L}x)\,dx=\begin{cases}0 & ; m\neq n\\ L & ; m=n\end{cases}$
  - دو تا cos : $\int_{-L}^{L}\cos(\frac{n\pi}{L}x)\cdot\cos(\frac{m\pi}{L}x)\,dx=\begin{cases}0 & ; m\neq n\\ L & ; m=n\end{cases}$
  - sin و cos : $\int_{-L}^{L}\cos(\frac{n\pi}{L}x)\cdot\sin(\frac{m\pi}{L}x)\,dx=0$
- ← بسل (J ها نسبت به هم و Y ها نسبت به هم) : $\int_0^1 \underline{x}J_n(\lambda x)\cdot J_n(\mu x)\,dx=0$

متعامدیت $\underline{I_o}$

- ← لژاندر : $\int_{-1}^{1}P_m(x)\cdot P_n(x)\,dx=\begin{cases}0 & ; m\neq n\\ \frac{2}{2n+1} & ; m=n\end{cases}$
- ← معادله دیف هرمیت : $y''-2xy'+2ny=0$ (تابع وزنی : e^{-x^2})

- مسائل مقدار ویژه ی اشتورم - لیوویل :

   - حالت کلی :

$$[P(x)\cdot y']'+[Q(x)+\underbrace{\lambda}_{\text{مقدار ویژه}}\cdot\underbrace{r(x)}_{\text{تابع وزنی}}]y=0 \quad ; \; x_1<x<x_2$$

   - توابع ویژه نسبت به تابع وزنی $r(x)$ متعامدند :

$$\int_{x_1}^{x_2}\underline{r(x)}\cdot y_n(x)\cdot y_m(x)\,dx=0 \quad ; \; n\neq m$$

   - داریم : $y''+\lambda y=0 \; ; 0<x<L$

① $y(0)=y(L)=0 \implies \lambda_n=(\frac{n\pi}{L})^2 \; , \; y_n=k\sin\sqrt{\lambda_n}\cdot x$

② $y'(0)=y'(L)=0 \implies \lambda_n=(\frac{n\pi}{L})^2 \; , \; y_n=k\cos\sqrt{\lambda_n}\cdot x$

③ $y(0)=y'(L)=0 \implies \lambda_n=[\frac{(2n-1)\pi}{2L}]^2 \; , \; y_n=k\sin\sqrt{\lambda_n}\cdot x$

④ $y'(0)=y(L)=0 \implies \lambda_n=[\frac{(2n-1)\pi}{2L}]^2 \; , \; y_n=k\cos\sqrt{\lambda_n}\cdot x$

مرز اول (نوع سوم $\cot(\lambda L)=\frac{-h}{k\lambda}$

نوع دوم) ~ $\tan(\lambda L)=\frac{h}{k\lambda}$

± حاصل ~~...~~ $\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$ وقتی صفر میشه که $f(x)\cdot g(x)$ یه تابع فرد باشه (یکی شون زوج دیگری فرد)

± معادله دیف چبیشف : $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$ (تابع وزنی : $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$)

«ریاضی - معادلات دیف با مشتقات جزئی»

① ساختار

حالت کلی: $A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G$ or $\frac{-c}{by}$

$B^2-4AC>0$ هذلولی گون (مثل معادله موج)

$B^2-4AC=0$ سهمی گون (" " حرارت)

$B^2-4AC<0$ بیضی گون (" " لاپلاس)

- شرط مرزی همگن: همه‌ی جملهاش برحسب تابع یا مشتقاتش

- حل $au_x+bu_y+cu=0$: $u=e^{\left(-\frac{c}{a}x\right)}f(ay-bx)$
- حل $Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}=0$: روش اپراتوری

② روش جداسازی

- سیستم نامحدود نباشه - معادله دیف باید همگن باشه - حداکثر یه شرط مرزی ناهمگن
- براساس نوع مختصات سیستم [کارتزین، استوانه‌ای، کروی] توی جهت غیرهمگن به توابع متعامد [سری فوریه، بسل، لژاندر] میرسیم
  - اگه گفت استوانه توخالیه، Y_0 هم میداد
  - J_0 ، $Y_0(\lambda r)$
  - مثلثاتی: $\sin$ ، $\cos$
- معادله دیف جزئی با تغییر متغیر $\psi(r,t)=r\theta(r,t)$ از مختصات کروی به کارتزین تبدیل میشه

③ معادلات اصلی

معادله موج

$u_{tt}=c^2\cdot u_{xx}$; $0<x<L$, $t>0$

$u(0,t)=u(L,t)=0$

$u(x,0)=f(x)$, $0\le x\le L$ → وضعیت اولیه سیم

$u_t(x,0)=g(x)$, $0\le x\le L$ → سرعت اولیه سیم

معادله حرارت

$u_t=c^2\cdot u_{xx}$; $0<x<L$, $t>0$

$u(0,t)=u(L,t)$

$u(x,0)=f(x)$ → دمای اولیه

معادله لاپلاس

$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$

$0<r<R$: $\sum(a\sin+b\cos)r^n$ — استوانه‌ای، توپر؛ کروی: P_n (لژاندر)

$R<r$: $\sum(a\sin+b\cos)r^{-n}$ — کروی: P_n

لاپلاس: $F_n(x)\cdot G_n(y)$

$F_n(x)$ → اشتورم

→ $G_n(y)=\sinh(\sqrt{\lambda}y)$ or $\cosh$

→ $G_w(y)=e^{-\sqrt{\lambda}y}$

موج: $G(t)=\sin(ct\sqrt{\lambda})$ or $\cos$

حرارت: $G(t)=e^{-c^2\lambda t}$

پاسخ حالت پایدار: $\frac{\partial u}{\partial t}=0$

- جواب‌ها:
  - اگه x متناهی بود: Σ
  - " " نامتناهی " : $\int$
- مقادیر ویژه:
  - $0<x<L$:
    - جفت u یا u_x: $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$
    - نه: $\lambda_n=\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2$
  - متناوب:
    - $0<x<L$: $\lambda_n=\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2$
    - $-L<x<L$: $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$
  - حداقل یه شرط کراندار: $\lambda_w=w^2$
  - اگه نه، جداکنی دوباره بیار با شرایط مرزی $\frac{w^2}{\ }=-\lambda^2$

④ معادلات ناهمگن

- حالتای مختلف واسه‌ی شرایط مرزی:

$\begin{cases}u(0,t)=a(t)\\u(L,t)=b(t)\end{cases}\Rightarrow W(x,t)=\frac{x}{L}[b(t)-a(t)]+a(t)$

$\begin{cases}u_x(0,t)=a(t)\\u(L,t)=b(t)\end{cases}\Rightarrow W(x,t)=(x-L)\cdot a(t)+b(t)$

$\begin{cases}u(0,t)=a(t)\\u_x(L,t)=b(t)\end{cases}\Rightarrow W(x,t)=x\cdot b(t)+a(t)$

$\begin{cases}u_x(0,t)=a(t)\\u_x(L,t)=b(t)\end{cases}\Rightarrow W(x,t)=\frac{x^2}{2L}[b(t)-a(t)]+a(t)\cdot x$

تقسیم کن معادله رو (سولوشن) به قسمت همگن و ناهمگن

(5) روش ترکیب

- دارای معادلاتی
  - باید شرط مرزی توی بی‌نهایت
  - که مقدار تابع مجهول به ازای دو تا شرط مرزی متفاوت باید شرط مرزی واحدی بده
  - ~~...~~ سهموی که مقیاس طول فیزیکی ندارن ($B^2-4AC=0$)

$$\frac{\partial f}{\partial t}=A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad , \eta=\frac{x}{\sqrt{KAt}} \quad \Longrightarrow \quad f''+\frac{k}{2}\eta f'=0 \rightarrow u''+2\eta u'=0$$

$4 \leftarrow$

$$x\frac{\partial f}{\partial t}=A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad , \eta=\frac{x}{\sqrt[3]{KAt}} \quad \Longrightarrow \quad f''+\frac{k}{3}\eta^2 f'=0 \rightarrow u''+3\eta^2u'=0$$

$9 \leftarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\alpha}{x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad , \eta=\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} \quad \Longrightarrow \quad u''+\left(2\eta+\frac{1}{\eta}\right)u'=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\alpha}{\cancel{x}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad , \eta=\frac{x}{\sqrt[3]{9\alpha t}} \quad \Longrightarrow \quad u''+\left(3\eta^2-\frac{1}{\eta}\right)u'=0$$

(6) حل با لاپلاس

$$L\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=L\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-sU(x,s)=0$$

$$\Longrightarrow U(x,s)=C_1e^{\sqrt{s}x}+C_2e^{-\sqrt{s}x}$$

+ توی یه کاتالیست متخلخل به شعاع R_E، واکنش درجه اول $A \to B$ انجام می‌شه. غلظت ماده A توی سطح کاتالیست، C_{AS}؛ تغییرات غلظت A توی سیال توی خودِ کاتالیست:

C_{AS}, r

$$\frac{D}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dC_A}{dr}\right)-KC_A=0 \quad , \quad \psi=C_A\cdot r \ , C_A=\frac{\psi}{r}$$

$$\frac{dC_A}{dr}=\cancel{\frac{d\psi}{}}-\frac{-\psi}{r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d\psi}{dr} \quad , \cancel{\frac{d^2C_A}{dr^2}}= \longrightarrow \frac{d^2\psi}{dr^2}-\frac{K}{D}\psi=0 \Rightarrow \psi=C_1e^{\sqrt{\frac{K}{D}}r}+C_2e^{-\sqrt{\frac{K}{D}}r}$$

$$\Rightarrow C_A=\frac{C_1}{r}e^{\sqrt{\frac{K}{D}}r}+\frac{C_2}{r}e^{-\sqrt{\frac{K}{D}}r} \longrightarrow \begin{matrix}\sinh\\ \cosh\end{matrix} \xrightarrow[C_2=0]{r=0 \ C_A=\text{متناهی}} C_A=\frac{C_1}{r}\sinh\sqrt{\frac{K}{D}}r$$

+ پارامتر وردایی:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad , \quad t=0 \ , T=T_i \ ; \ x=0, \ \frac{\partial T}{\partial x}=0 \ ; \ x=L \ , \ \frac{\partial T}{\partial x}=NT$$

$$XW'=\alpha WX'' \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{W'}{W}=\frac{X''}{X}=-\lambda^2 \Rightarrow X''+\lambda^2X=0 \Rightarrow X=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x=0$$

$$x=0, \ \frac{\partial T}{\partial x}=0 \Rightarrow C_2=0 \quad , \quad x=L, \ \frac{\partial T}{\partial x}=NT \Rightarrow -C_1\lambda\sin\lambda L=NC_1\cos\lambda L \Rightarrow \cot\lambda L+\frac{1}{N}\lambda=0$$

HARVEST 08

«ریاضی - حل عددی معادلات غیرخطی»

- مرتبه‌ی تکرار ریشه‌ی α (m) ← کوچکترین مرتبه‌ی مشتق از تابع f که به ازای α صفر نمی‌شه : $f(\alpha)=f'(\alpha)=\cdots=f^{(m-1)}(\alpha)=0,\ f^{(m)}(\alpha)\neq 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p}\right|=C \rightarrow \text{ثابت همگرایی دنباله}$$

p ← مرتبه‌ی همگرایی α ← عددی که دنباله‌ی x به اون همگراست

$$y=a^x$$

$$y'=y\ln a=a^x\ln a$$

① روش تنصیف

- مرتبه‌ی همگرایی‌ش $\underline{1}$ و ثابت همگرایی‌ش $\underline{\frac{1}{2}}$

$$n=\left[\log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)\right]+1$$

② روش نابجایی

- روش بعدی‌ش محل تلاقی خط گذرنده از $A\big|^{a}_{f(a)}$ و $B\big|^{b}_{f(b)}$ از محور طول

$$x_n=\frac{a f(b)-b f(a)}{f(b)-f(a)}$$

③ روش تکرار ساده

- می‌گه که $f(x)=0$ رو به شکل $x_{n+1}=g(x_n)$ می‌نویسیم

$|g'(x)|\leq L<1$ شرط همگرایی‌ش

(هرچی L کوچیکتر، سرعت همگرایی بیشتر)

- اگه $g'(\alpha)\neq 0$: مرتبه‌ی همگرایی‌ش $\underline{1}$ و ثابت همگرایی‌ش $|g'(\alpha)|$

- اگه مشتق‌ها به ازای α تا $\underline{k-1}$ صفر بشن و $g^{(k)}(\alpha)\neq 0$ بشه : مرتبه‌ی همگرایی‌ش $\underline{k}$ و ثابت همگرایی‌ش $\frac{1}{k!}|g^{(k)}(\alpha)|$

④ روش نیوتن - رافسون

- براساس محل عبور ~~خط~~ خط مماس به منحنی توی درس قبلی از محور طول‌ها

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$\left|\frac{f(x_0)\cdot f''(x_0)}{f'(x_0)^2}\right|<1$: شرط همگرایی‌ش

- در مورد مرتبه‌ی همگرایی‌ش

اگه $f'(\alpha)=0$ ← 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}=1-\frac{1}{m}$$

m ← مرتبه‌ی تکرار ریشه‌ی α

اگه $f'(\alpha)\neq 0$:

اگه $f''(\alpha)\neq 0$ ← 2 ، ثابت همگرایی : $\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$

اگه $f''(\alpha)=0$ ← $2<$

- روش تغییر یافته‌ش :

$$x_{n+1}=x_n-(m-k)\frac{f^{(k)}(x_n)}{f^{(k+1)}(x_n)}$$

اکثر هم مثال‌ها با این :

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$

- حل دستگاه

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{cases}$$

$$F(x_n,y_n)=\begin{bmatrix} f_1(x_n,y_n) \\ f_2(x_n,y_n)\end{bmatrix},\quad J(x_n,y_n)=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}f_1(x_n,y_n) & \frac{\partial}{\partial y}f_1(x_n,y_n) \\ \frac{\partial}{\partial x}f_2(x_n,y_n) & \frac{\partial}{\partial y}f_2(x_n,y_n)\end{bmatrix}$$

$$J(x_n,y_n)\cdot\begin{bmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{bmatrix}=\ominus F(x_n,y_n)$$

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n+\Delta x \\ y_{n+1}=y_n+\Delta y\end{cases}$$

⑤ روش وتری ← روش سکانت

- مثل نیوتن ولی با تقریب زدن شیب

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}}$$

HARVEST 09

« درونیابی - درون‌یابی و برازش »

① درونیابی

- درجه‌ی چند جمله‌ای درونیاب کمتر / مساوی نقاط درونیابیه

- روش لاگرانژ :

$$P(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

- تفاضلات تقسیم شده‌ی نیوتن و ~~استرلینگ~~ اسپلاین هم واسه‌ی غیر فاصله‌های مساوی به کار میره

$$P(x)=f[x_0]+(x-x_0).f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1).f[x_0,x_1,x_2]$$

- خطای چند جمله‌ای درونیاب

کران بالا واسه‌ی $f^{(n+1)}(\eta)$

$$E(x)=f(x)-P(x)\Rightarrow |E|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$$

	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
x_0	f_0			
		$\Delta f_0=f_1-f_0$		
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$	
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$	
		Δf_2		
x_3	f_3			

جدول تفاضلات پیشرو

i	0	1	2	3
	f	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$
x_0	f_0			
		∇f_1		
x_1	f_1		$\nabla^2 f_1$	
		∇f_2		$\nabla^3 f_1$
x_2	f_2		$\nabla^2 f_2$	
		∇f_3		
x_3	f_3			

جدول تفاضلات پسرو

اگه عناصر ستون i صفر باشن ، چند جمله‌ای درونیاب از درجه‌ی i ئه

$$P(r)=f_0+r.\Delta f_0+\frac{r(r\mp1)}{2}\Delta^2 f$$

$$r=\frac{x-x_0}{h}$$

- خطای چند جمله‌ای درونیاب واسه‌ی نقاط هم فاصله :

$$|E(x)|\leqslant\frac{h^{n+1}.M_{n+1}}{4(n+1)}\qquad\left(|E(x)|\leqslant\frac{h^3M_3}{9\sqrt3}\ :\ n=2\right)\ \text{دقیق‌تر}$$

داده مرتبه‌ی n ← از مرتبه‌ی $n+1$

اگه ازش انتگرال بگیریم یه مرتبه به خطاش اضافه می‌شه

② عملگرها

- همانی (I) : $I.f(x)=f(x)$
- انتقال (E) : $E.f(x)=f(x+h)$
- انتقال معکوس (E^{-1}) : $E^{-1}.f(x)=f(x-h)$
- تفاضل پیشرو (Δ) : $\Delta.f(x)=f(x+h)-f(x)$
- تفاضل پسرو (∇) : $\nabla.f(x)=f(x)-f(x-h)$
- تفاضل مرکزی (δ) : $\delta.f(x)=f(x+\frac{h}{2})-f(x-\frac{h}{2})$
- میانگین (μ) : $\mu.f(x)=\frac{1}{2}[f(x+\frac{h}{2})+f(x-\frac{h}{2})]$

$$\Delta=E-I\ ,\ \nabla=I-E^{-1}\ ,\ \delta=E^{1/2}-E^{-1/2}\ ,\ \mu=\frac{1}{2}(E^{1/2}+E^{-1/2}),\ \Delta\nabla=\nabla\Delta=\Delta-\nabla$$

$$\Delta=E\nabla\ ,\ \nabla=E^{-1}\Delta\qquad \Delta^3f_i=f_{i+3}-3f_{i+2}+3f_{i+1}-f_i$$

if

③ برازش

چند جمله‌ای تقریب کمترین مربعات ←

- راه اصلی دترمینی :

$$E=\sum(y_i-P(x_i))^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_k}=0$$

← به ازای هر کدوم از ضرایب $P(x_i)$

- برازش خطی : $P(x_i)=a_0+a_1x_i=y_i$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_iy_i \end{bmatrix}$$

- واسه‌ی برازش خطی، میانگین داده‌ها توی معادله صدق می‌کنه :

$$a_0+a_1\bar{x}=\bar{y}$$

$y = ax^n \implies a = \dfrac{\sum x_i^n y_i}{\sum x_i^{2n}}$

$\underline{n=1}$: $a = \dfrac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$

$\underline{n=2}$: $a = \dfrac{\sum x_i^2 y_i}{\sum x_i^4}$

---

if $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots$: $\Delta^n f(x) = a_n n! h^n$

« ریاضی - مشتق‌گیری عددی »

- همراه با مشتق تفاضل‌ها [illegible]

کل روابط مورد نیاز

دو نقطه‌ای :

مرتبه 1 $\quad f'_i \simeq \frac{\Delta f_i}{h} = \frac{f_{i+1}-f_i}{h}$

سه نقطه‌ای (تفاضل پیشرو) :

مرتبه 2 $\quad f'_i \simeq \frac{1}{h}\left(\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i\right) = \frac{1}{2h}\left(-f_{i+2}+4f_{i+1}-3f_i\right)$

تفاضل پسرو :

$$f'_i \simeq \frac{1}{h}\nabla f_i = \frac{1}{h}(f_i - f_{i-1})$$

تفاضل مرکزی :

مرتبه 2 $\quad f'_i \simeq \frac{1}{2h}(f_{i+2}-f_i)$

- مشتق‌های مراتب بالاتر رو با همینا حساب کن

- در درون‌یابی خطی مشتق :

$$f'(x) \simeq \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\cdot f'(x_i) + \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\cdot f'(x_{i+1})$$

مخرج توی مشتق مرتبه 2 می‌شه $\frac{1}{h^2}$

- مثلن مشتق تابع $f(x)$ به کمک تفاضل پسرو با خطای کلی $O(h^2)$:

$$f_{i-1} = f_i - hf'_i + \frac{h^2}{2}f''_i$$

$$\Rightarrow f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + \frac{h^2}{2h}\left(\frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{h^2}\right)$$

$$= \frac{(3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2})}{2h}$$

O کلی $\left(\frac{1}{3}h^2\right) \rightarrow$ بسط تیلور

$$f'''_i \simeq \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3}$$

مرکزی

- اگر $h \rightarrow \frac{h}{2}$ ، خطای مشتق پیشرو مرتبه یک [illegible] می‌شه از مرتبه 2 ([illegible] دو نقطه‌ای)

HARVEST 11

« ریاضی - انتگرال گیری عددی »

- فرمول های بسته :

ذوزنقه :

$$\int_a^b f(x)dx \approx T(h) = \frac{h}{2}\sum(f_i + f_{i+1}) = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + f_n)$$

$$ET(h) = \frac{h^2}{12}(b-a).f^{(2)}(\eta) = O(h^2) \rightarrow$$ واسه ی چند جمله ای های حداکثر از درجه یک دقیقه

سیمپسون ،

$$\int_a^b f(x)dx \approx S(h) = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

$$ES(h) = \frac{h^4}{180}(b-a).f^{(4)}(\eta) = O(h^4)$$

سیمپسون $\frac{3}{8}$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_{3/8}(h) = \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + \cdots + f_n)$$

$$ES_{3/8}(h) = \frac{h^4}{80}(b-a).f^{(4)}(\eta) = O(h^4)$$

- فرمول های باز ← نقطه میانی :

$$\int_a^b f(x)dx \approx M(h) = h\left[f(x_0 + \tfrac{h}{2}) + f(x_1 + \tfrac{h}{2}) + \cdots + f(x_{n-1} + \tfrac{h}{2})\right]$$

نصف ذوزنقه ← $EM(h) = \frac{h^2}{24}(b-a).f^{(2)}(\eta) = O(h^2)$

- روش رامبرگ :

$$R_{kj} = \frac{4^{j-1} \cdot R_{k(j-1)} - R_{(k-1)(j-1)}}{4^{j-1} - 1}$$

R_{11}

R_{21} $\quad R_{22}$ $\;(k-1)(j-1)$

R_{31} $\quad R_{32}$ $\;k(j-1)$ $\quad R_{33}$ $\;kj$

- روش گاوس

دو نقطه ای : تا درجه 3 دقیقه

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

سه نقطه ای : تا درجه 5 دقیقه

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,dt \quad , \quad g(t) = f(x)$$

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)t + (b+a)]$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

$$f(x) = 1, x, x^2, \ldots, x^n$$

HARVEST 12

«ریاضی - حل عددی معادلات دیف معمولی»

① معادلات دیف مقدار اولیه (IVP) ← روش های صریح

- روش تیلور ← رابطه ش:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{1!} y'_n + \frac{h^2}{2!} y''_n + \cdots + \frac{h^k}{k!} y_n^{(k)}$$

← واسه ی مرتبه ی k، $\underline{k+1}$ جمله داره (تا مشتق مرتبه ی $\underline{k}$)

- روش اویلر ← معمولی و $(y_{n+1} = y^*_{n+1})$:

← اصلاح شده (هیون) $= RK2 =$ RK نقطه وسط

$$y^*_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})\right]$$

- روش های رانگ - کوتا:

RK2 $O(h^3)$

$$\begin{cases} k_1 = h \cdot f(x_n, y_n) \\ k_2 = h \cdot f(x_{n+1}, y_n + k_1) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{cases}$$

RK3 $O(h^4)$

$$\begin{cases} k_1 = h \cdot f(x_n, y_n) \\ k_2 = h \cdot f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = h \cdot f(x_n + h, y_n + 2k_2 - k_1) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \end{cases}$$

RK4

$$\begin{cases} k_1 = h \cdot f(x_n, y_n) \\ k_2 = h \cdot f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = h \cdot f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases}$$

- توی اینا مقادیر تابع یا مشتقاش توی یه نقطه (نقطه اولیه) معلومه

- خطای روش RK مرتبه m با طول گام h: (h^m)

② معادلات دیف مقدار مرزی (BVP) ← معادلات معمولی مرتبه 2ن

- روش تیراندازی ← حدس و خطای
← می شه توش درون یابی کرد (هیچ قاعده کلی ای نداره)

- روش تفاضل محدود ← یعنی جایگذاری مشتقات معادلات با ترتیب:

- توی اینا مقدار تابع توی چند تا نقطه مشخصه

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

پیشرو پسرو مرکزی

$$y''_i = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} = \frac{y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i}{h^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

«ریاضی حل عددی معادلات دیف با مشتقات جزئی»

① روش تفاضل محدود

- واسه‌ی هر نوع PDE (سهموی، بیضوی، هذلولوی)
- با جاگذاری تقریب های تفاضلی پیشرو، پسرو یا مرکزی

② وقتی زمان به متغیر مستقله ← سهموی

- روش صریح (Explicit)
  - پیشرو در زمان - مرکزی در مکان
  - شرط پایداری داره:
  - به حالت پرکاربرد

$$u_{i,t+1} = a u_{i+1,t} + b u_{i,t} + c u_{i-1,t}$$

1) $a, b, c > 0$

2) $a+b+c \leqslant 1$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Longrightarrow \cancel{\frac{\partial}{\partial}} \frac{T_{i,t+1} - T_{i,t}}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i+1,t} - 2T_{i,t} + T_{i-1,t}}{\Delta x^2}$$

$$\Longrightarrow T_{i,t+1} - T_{i,t} = \underbrace{\frac{\alpha . \Delta t}{\Delta x^2}}_{\lambda =} (T_{i+1,t} - 2T_{i,t} + T_{i-1,t}) \Longrightarrow T_{i,t+1} = \lambda (T_{i+1,t} + T_{i-1,t}) + (1-2\lambda) T_{i,n}$$

شرط پایداریش

یه بعدی : $1 - 2\lambda \geqslant 0 \Longrightarrow 0 \leqslant \lambda \leqslant 1/2$

دو بعدی : $1 - 4\lambda \geqslant 0 \Longrightarrow 0 \leqslant \lambda \leqslant 1/4$

سه بعدی : $1 - 6\lambda \geqslant 0 \Longrightarrow 0 \leqslant \lambda \leqslant 1/6$

- روش ضمنی (Implicit)
  - اینم پیشرو در زمان - مرکزی در مکان (معادلات مکانی توی زمان جدید که مجهول‌ان می‌نویسیم)
  - به چند معادله و چند مجهول تبدیل میشه
  - شرط پایداری نمی‌خواد

- روش کرانک نیکلسون
  - یه روش همواره پایدار
  - مشتقات مکانی رو به صورت متوسطی از تفاضل صریح و ضمنی میگیره (یعنی میانگین زمان های t و $t+1$)
  - توی حالت [یه بعدی، دو بعدی، سه بعدی] به یه ماتریس [سه، پنج، هفت] قطری می‌رسیم

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \beta T = \frac{\partial T}{\partial t} \Longrightarrow \alpha \left(\frac{T_{i+1,t} - 2T_{i,t} + T_{i-1,t}}{(\Delta x)^2} \right) + \beta T_{i,t} = \frac{T_{i,t+1} - T_{i,t}}{\Delta t}$$

$$\xrightarrow{\times \frac{\Delta t}{\cancel{\Delta x^2}}} \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (T_{i+1,t} - 2T_{i,t} + T_{i-1,t}) + \beta \Delta t \, T_{i,t} = T_{i,t+1} - T_{i,t}$$

$$\Longrightarrow T_{i,t+1} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{i+1,t} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{i-1,t} \underbrace{\left(\beta \Delta t - 2\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} + 1 \right)}_{} T_{i,t}$$

$$1 - \frac{2\alpha \Delta t}{\Delta x^2} + \beta \Delta t \geqslant 0 \Longrightarrow \Delta t \left(\beta - \frac{2\alpha}{\Delta x^2} \right) \geqslant -1$$

$$1 - 2\lambda + \beta \Delta t \geqslant 0 \qquad \Longrightarrow \Delta t \leqslant \frac{1}{\frac{2\alpha}{\Delta x^2} - \beta}$$

HARVEST 19

ریاضی - حل دستگاه های معادلات خطی

- روش های حل
  - روش های مستقیم
    - حذفی گاوس (تبدیل به یه ماتریس مثلثی) ← محدودیت دارد و دارای [illegible]
    - حذفی گاوس جردن (تبدیل به یه ماتریس قطری) ← برای تعیین معکوس ماتریس هم به کار می‌رود
      بالا مثلثی هم ← پایین مثلثی
  - روش های تجزیه‌ای
    - تجزیه مثلثی (دولیتل - کروت - چولسکی)
    - QR , SVD
  - روش های تکراری
    - ژاکوبی
    - گاوس سایدل
    - SOR

$Ax=b \qquad (A=LU)$

- شرط کافی واسه همگرایی روش های ژاکوبی و گاوس سایدل : $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \;,\; i=1,2,\ldots,n$
- اگه همه‌ی عناصر ماتریس ضرایب مثبت باشن، روش گاوس سایدل همگرا است (مرتب تکرار درست)
- ماتریس افزوده یعنی این :

$$\begin{cases} a_1x_1+b_1x_2=c_1 \\ a_2x_2+b_2x_2=c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

- مقادیر مشخصه‌ی ماتریس از رابطه‌ی $|A-\lambda I|=0$ بدست میاد
- دستگاه Ill-condition : در معادله‌ی منطبق بهم
- واسه جواب داشتن یه دستگاه معادلات باید دترمینان ماتریس ضرایبش مخالف صفر باشه : $|A|\neq 0$

«ریاضی - تبدیل لاپلاس و کاربردهایش»

① مقدمات

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

$$A \xrightarrow{L} \frac{A}{s} \qquad \sinh at \xrightarrow{L} \frac{a}{s^2 \pm a^2} \qquad f*g = \int_0^t f(t-x)g(x)dx = \int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

$$t^{\alpha} \xrightarrow{L} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \qquad \cosh at \xrightarrow{L} \frac{s}{s^2 \pm a^2} \qquad L[f*g] = L[f] \times L[g]$$

$$e^{at} \xrightarrow{L} \frac{1}{s-a} \qquad \delta(t-a) \xrightarrow{L} e^{-as} \qquad u_a(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s} e^{-as}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a) g(t)dt = g(a) \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

توابع متناوب $f(t+T) = f(t)$:

$$L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

$$\xrightarrow{a=0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) g(t)dt = g(0) \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

② قضایا

$$L[e^{at} \cdot f(t)] = F(s-a) = L[f(t)]\Big|_{s \to (s-a)} \qquad L^{-1}[F(s-a)] = e^{at} \cdot f(t) = e^{at} \cdot L^{-1}[F(s)]$$

$$L[u_a(t) \cdot f(t)] = e^{-as} \cdot L[f(t+a)] \qquad L^{-1}[e^{-as} \cdot F(s)] = u_a(t) \cdot L^{-1}[F(s)]\Big|_{t \to (t-a)}$$

$$L[\delta(t-a) \cdot f(t)] = e^{-as} \cdot f(a) \qquad L[\delta(t-a)] = e^{-as}$$

$$L[\delta(t) \cdot f(t)] = f(0) \qquad L[\delta(t)] = 1$$

$$L[t \cdot f(t)] = -F'(s) = -(L[f(t)])' \quad , \quad L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} L[f(t)]ds$$

$$L^{-1}[F(s)] = \frac{-1}{t} L^{-1}[F'(s)] \quad , \quad \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} L[f(t)]ds$$

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s} F(s) = \frac{1}{s} \cdot L[f(t)] \quad , \quad L^{-1}\left[\frac{1}{s} F(s)\right] = \int_0^t f(t)dt = \int_0^t L^{-1}[F(s)]dt$$

$$L[f(kt)] = \frac{1}{k} F\left(\frac{s}{k}\right) = \frac{1}{k} L[f(t)]\Big|_{s \to \frac{s}{k}} \qquad L[f'(t)] = s \cdot L[f(t)] - f(0)$$

$$L^{-1}[F(ks)] = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right) = \frac{1}{k} L^{-1}[F(s)]\Big|_{t \to \frac{t}{k}}$$

- اگر از یه معادله دیف خطی با ضرایب ثابت، لاپلاس بگیریم، به یه معادله جبری می‌رسیم

- تبدیل لاپلاس معادله دیف کوشی-اویلر:

$$L[x^2y'' + axy' + by] = s^2Y'' + (4-a)sY' + (2-a+b)Y = c$$

$$L[t^n \cdot f(t)] = (-1)^n \cdot F^{(n)}(s)$$

87 $\frac{\partial C}{\partial t} + V\frac{\partial C}{\partial x} = -kC \quad , \quad C(x=0) = C_0 \quad , \quad \bar{C} = ?$

$$\xrightarrow{L} s\bar{C}(x,s) - C(x,0) + V\frac{d\bar{C}(x,s)}{dx} = -k\bar{C}(x,s) \Rightarrow \frac{d\bar{C}(x,s)}{dx} + \frac{s+k}{V}\bar{C}(x,s) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{C}(x,s) = C_1 e^{-\frac{s+k}{V}}$$

ـــ واسه‌ی اعمال شرایط مرزی : $t=0 \equiv s \to \infty$

$$y = f(x) \quad , [-L, L] \quad , \quad T = 2L$$

$$\hookrightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$